פתרון תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). הכינו דגם מנייר של החבורה הדיהדרלית D_4.

שאלה 2. אפשר להעזר בדגם של D_n לבדיקות.

1. מצאו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של D_4, והוכיחו שכולן אבליות. האם כולן ציקליות?
2. הוכיחו לכל $m > 1$ כי $Z(D_{2m-1}) = \{\mathrm{id}\}$ ו-$Z(D_{2m}) = \langle \sigma^m \rangle$. רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה דיהדרלית?
3. כתבו את משוואת המחלקות של D_5 מבלי להתאמץ. כלומר חשבו את הגודל של כל מחלקות הצמידות ללא צורך בחישוב ישיר לכל איבר. רמז: הסעיף הקודם עם כך שגודל מחלקת צמידות מחלק את סדר החבורה.

פתרון.

1. השלם...נציג את החבורה בצורה הרגילה, כחבורה הנוצרת על ידי האיברים σ, סיבוב ב-90° ו-τ, שיקוף לגבי ציר כלשהו של הריבוע. כלומר בכתיב של יוצרים ויחסים:

$$D_4 = \left\langle \sigma, \tau \,\middle|\, \sigma^4 = \tau^2 = \mathrm{id}, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \right\rangle$$

ידוע לנו כי $|D_4| = 8$. לפי משפט לגראנז' הסדרים האפשריים היחידים של תת־חבורות הם $\{1, 2, 4, 8\}$. הסדרים 1 ו-8 מתקבלים עבור תת־החבורות הטריוויאליות. המספר 2 הוא ראשוני, ולכן כל תת־חבורה מסדר זה חייבת להיות ציקלית, ונוצרת על ידי איבר מסדר 2. מסתבר שיש חמש תת־חבורות מסדר 2 והן

$$\left\langle \sigma^2 \right\rangle, \left\langle \tau \right\rangle, \left\langle \tau\sigma \right\rangle, \left\langle \tau\sigma^2 \right\rangle, \left\langle \tau\sigma^3 \right\rangle$$

יש גם שלוש תת־חבורות מסדר 4 שאותן מגלים על ידי בדיקה של זוגות של איברים מסדר 2 או 4 כקבוצות יוצרים. תת־החבורות הן

$$\left\langle \sigma \right\rangle, \left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle = \left\{\mathrm{id}, \sigma^2, \tau, \tau\sigma^2\right\}, \left\langle \sigma^2, \tau\sigma^3 \right\rangle = \left\{\mathrm{id}, \sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma\right\}$$

קל לראות שכל תת־החבורות הציקליות הן אבליות. לגבי תת־החבורות $\left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle$ ו-$\left\langle \sigma^2, \tau\sigma^3 \right\rangle$ בדיקה ישירה תראה שהן אבליות (למשל על ידי טבלת כפל), אבל הן לא ציקליות כי אין בהן איבר מסדר 4.

2. נתחיל בכך שנשים לב שכל איבר של D_n יכול להכתב בצורה $\tau^i\sigma^j$ כאשר $i \in \{0,1\}$ ו-$j \in \{0,1,\dots,n-1\}$. מהיחס $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ אפשר בקלות לקבל את היחסים $\sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ לכל $k \in \mathbb{Z}$. כמו כן, מפני שהקבוצה $\{\sigma,\tau\}$ יוצרת את D_n, אז איבר $\alpha \in D_n$ נמצא במרכז אם ורק אם הוא מתחלף עם קבוצת היוצרים (ודאו שאתם מבינים למה זה נכון גם לחבורות אחרות!).
נניח $\alpha = \tau^i\sigma^j \in Z(D_n)$ בהצגה לעיל. דרשנו כי $\alpha\sigma = \sigma\alpha$, כלומר $\tau^i\sigma^j\sigma = \sigma\tau^i\sigma^j$, לכן אחרי כפל משמאל ב-$\sigma^{-j}$ נקבל

$$\tau^i\sigma = \sigma\tau^i$$

וזה יתכן אם $i = 0$. אך זה לא ייתכן אם $i = 1$, הרי נקבל $\tau\sigma = \sigma\tau$ וידוע לנו שהם לא מתחלפים (עבור $n \geq 3$). כלומר האיברים שאנחנו מחפשים הם מן הצורה $\alpha = \sigma^j$. כעת נבדוק התחלפות עם τ, כלומר מתי $\tau\alpha = \alpha\tau$. זה יקרה אם $\tau\sigma^j = \sigma^j\tau$ ולפי היחסים שקיבלנו לעיל, זה שקול ל-$\tau\sigma^j = \tau\sigma^{-j}$, כלומר מתי $\sigma^{2j} = \mathrm{id}$. ידוע לנו כי $o(\sigma) = n$, אז התשובה היא רק כאשר $j = 0$ או $j = \frac{n}{2}$. זה בדיוק הפיצול לפי הזוגיות בשאלה.
קיבלנו שבמקרה ו-$n = 2m-1$ אי זוגי, אז $Z(D_{2m-1}) = \{\mathrm{id}\}$ ואם $n = 2m$ זוגי, אז $Z(D_{2m}) = \{\mathrm{id}, \sigma^m\}$. להשלמת התמונה, נשים לב כי החבורות D_1 ו-D_2 הן אבליות, ולכן המרכז שלהן הוא כל החבורה.

3. הסכום במשוואת המחלקות הוא $|D_5| = 10$. הגודל של כל מחלקת צמידות מחלק את 10, ולפי הסעיף הקודם האיבר היחיד שמחלקת הצמידות שלו היא בגודל 1 הוא איבר היחידה (כי רק הוא ב-$Z(D_5)$). לכן בהכרח הגדלים של מחלקות הצמידות הם $1,2,2,5$, כי זו הדרך היחידה להציג את 10 כסכום של איברים מ-$\{1,2,5,10\}$ שמופיעה בה בדיוק פעם אחת 1.

שאלה 3. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

1. $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^{-3}$.
2. $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.
3. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}^+$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.
4. $f\colon S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.
5. $f_x\colon G \to G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x \in G$ איבר.
6. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = ([k],[k])$.
7. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3,\ n \bmod 6)$.

פתרון. ההוכחות כאן לא מלאות!

1. הפונקציה היא אפימורפיזם, אבל לא מונומורפיזם. למשל $f(1) = f(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 1$.
2. הפונקציה f היא הומומורפיזם. אבל היא לא מונומורפיזם כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. היא גם לא אפימורפיזם, כי למשל $-1 \notin \operatorname{im} f$, שהרי לכל $x \in \mathbb{Q}^*$ מתקיים $x^2 > 0$.

3. הפונקציה f היא הומומורפיזם, באופן דומה לסעיף הקודם. אבל היא לא מונומורפיזם, שוב, כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. הפעם היא כן אפימורפיזם, כי לכל $x \in \mathbb{R}^+$ קיים שורש רביעי $\sqrt[4]{x} \in \mathbb{R}^*$ שהוא ממשי שאינו אפס, ואז $f(\sqrt[4]{x}) = x$.

4. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל

$$f(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}) = 1 \neq 1 + 1 = f(\mathrm{id}) + f(\mathrm{id})$$

5. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. סוג כזה של איזומורפיזם נקרא אוטומורפיזם פנימי. נראה שאכן מדובר בהומומורפיזם:

$$f_x(gh) = xghx^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1} = f_x(g)f_x(h)$$

נוכיח שהגרעין טריוויאלי בכדי לראות ש-f_x הוא חח"ע. אם $xgx^{-1} = e$, אז $g = x^{-1}ex$ ולכן $g = e$. כלומר $\ker f_x = \{e\}$. כדי להראות ש-f_x הוא על, לכל $h \in G$ נתבונן באיבר $x^{-1}hx$, שהוא אכן מקור עבורו כי $f_x(x^{-1}hx) = h$.

6. פונקציה זו היא אכן הומומורפיזם. עם זאת, היא לא אפימורפיזם (אלא אם $n = 1$ ואז זה ברור. לאיבר $([1], [0])$ למשל אין מקור) ולא מונומורפיזם (למשל $f(k) = f(k+n)$).

7. הפונקציה היא הומומורפיזם, כשההוכחה מסתמכת על כך שחיבור מודולו n מוגדר היטב. היא לא מונומורפיזם, כי הסדר של המקור גדול ממש מסדר התמונה, או למשל כי $f(0) = f(6) = ([0], [0])$. היא לא אפימורפיזם, כי $\mathbb{Z}$ ציקלית ואילו $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ לא ציקלית, וכל התמונות של חבורה ציקלית הן ציקליות. אפשר גם להוכיח ישירות כי למשל $(1,3) \notin \operatorname{im} f$: אם n נשלח ל-$(1,3)$, אז לפי הרכיב השני $n \equiv 3 \pmod 6$, ונסיק $n \equiv 0 \pmod 3$. לא יתכן שבאותו הזמן גם $n \equiv 1 \pmod 3$.

8. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל כי היחידה לא נשלחת ליחידה, או ש-$f(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}) \neq f(\mathrm{id})f(\mathrm{id})$. בפרט זה לא מונומורפיזם או אפימורפיזם.

שאלה 4. הוכיחו שאם G חבורה נוצרת סופית ויש הומומורפיזם $f : G \to H$ אז $\mathrm{im}(f)$ נוצרת סופית.

הוכחה:

נניח שG נוצרת ע"י $\{g_1, ..., g_n\}$. זה אומר שכל איבר בG הוא מהצורה $\Pi g_i^{k_i}$ כאשר הg_i לא בהכרח שונים. (למשל, יש איבר $g_1^3 g_2^{-1} g_1$) נוכיח ש$Im(f)$ נוצרת ע"י $\{f(g_1), ..., f(g_n)\}$. ובכן, יהי $h \in \mathrm{im}(f)$. אזי

$$h = f(g) = f(\Pi g_i^{k_i}) = \Pi f(g_i)^{k_i}$$

מש"ל.

שאלה 5. יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם.

1. הוכיחו שאם G אבלית, אז $\mathrm{im}\, f$ תת־חבורה אבלית.

2. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

3. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $\varphi : D_8 \to U_{17}$.

פתרון. 1. אנחנו יודעים כי $\mathrm{im}\, f \leq H$. נותר להראות שהיא אבלית. יהיו $h_1, h_2 \in \mathrm{im}\, f$. אז ישנם איברים g_1, g_2 כך שמתקיים $f(g_1) = h_1, f(g_2) = h_2$. מפני שנתון ש-$G$ אבלית יתקיים גם

$$h_1h_2 = f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2) = f(g_2g_1) = f(g_2)f(g_1) = h_2h_1$$

ולכן כל זוג איברים ב-$\mathrm{im}\, f$ מתחלף.

2. אם חבורות הן איזומורפיות, אז יש בינהן איזומורפיזם. נניח $\phi : G \to H$ הוא איזומורפיזם. לכן ϕ הוא על, כלומר $\mathrm{im}\, \phi = H$. אם G היא אבלית, אז גם H היא אבלית לפי הסעיף הקודם. באופן דומה יש איזומורפיזם $\phi^{-1} : H \to G$ ולכן אם H אבלית, אז גם G אבלית.

3. שתי החבורות הן מסדר 16. לכן אם קיימת פונקציה על בינהן, אז היא גם חח״ע. כלומר אילו קיים φ אפימורפיזם כזה, אז זה איזומורפיזם. אבל D_8 לא אבלית ואילו U_{17} היא אבלית ולפי הסעיף הקודם נגיע לסתירה.

שאלה 6. הפריכו או הביאו דוגמא לשאלות הבאות:

1. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}^{\times}, \cdot)$. (רמז: העזרו בשאלה הקודמת)
פתרון: לא קיים, מכיוון ש$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ נוצרת סופית, ואילו $\mathbb{Q}^{\times}$ לא נוצרת סופית. (הוכחנו באחד התרגולים)

2. קיים מונומורפיזם $f : S_4 \to S_5$.
פתרון: קיים. נשלח כל תמורה ל״עצמה״, כלומר לאותה הפונקציה בדיוק על $\{1, .., 4\}$ שאת 5 משאירה במקום. למשל $(1, 2, 3, 4)$ הולך ל$(1, 2, 3, 4)$ רק בS_5 התמורה הזאת בעצם מסמלת את התמורה $(1, 2, 3, 4)(5)$. קל לראות שזה הומומורפיזם ושהוא חח״ע.

3. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$
פתרון: לא קיים, כי $\mathbb{Z}_{50}$ ציקלית, ואילו $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$ לא ציקלית. אפשר לראות את זה כי למשל הסדר של כל איבר ב $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$ הוא לכל היותר 10.

שאלה 7. תהי G חבורה. נגדיר $f : G \to G$ לפי $f(g) = g^2$.

1. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

2. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

פתרון.

1. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה G אבלית. יהיו $g, h \in G$. לכן

$$f(gh) = (gh)^2 = ghgh = g^2h^2 = f(g)\, f(h)$$

ולכן f הומומורפיזם. לכיוון השני, נניח ש-f הומומורפיזם. לכל $g, h \in G$ מתקיים $f(gh) = (gh)^2 = ghgh$ וגם $f(gh) = f(g)\, f(h) = g^2h^2$, כלומר $g^2h^2 = ghgh$. נצמצם ונקבל: $gh = hg$, כלומר G אבלית.

2. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה מסדר אי-זוגי. מכיוון שהפונקציה היא הומומורפיזם (לפי הסעיף הראשון) והחבורה סופית, מספיק להראות שהפונקציה חח״ע. לשם כך יש להסביר מדוע הגרעין הוא טריוויאלי. נניח בשלילה שקיים $g \in \ker f$ המקיים $g \neq e_G$. מהגדרת הפונקציה, $e_G = f(g) = g^2$, ולכן הסדר של g הוא 2. הסדר של g מחלק את הסדר של החבורה ולכן הסדר של החבורה הוא זוגי בסתירה להנחה.
בכיוון השני, נניח כי f היא איזומורפיזם. נניח בשלילה שהסדר של החבורה הוא זוגי, לכן יש איבר מסדר 2 (כפי שראינו בתרגול) ולכן f אינה חח״ע, כי האיבר הזה ואיבר היחידה שניהם בגרעין, שזו סתירה.

בהצלחה!