תרגילי הכנה למבחן בחדו"א (אינפי) 1 ופתרונותיהם – ינואר 2021

להלן, 'הופריכו' = 'הוכיחו או הפריכו'.

חלק א' -

1. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} \to 0$.
2. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_n^2}{a_{n+1}} \to 0$.
3. תהי סדרה a_n המקיימת כי $(a_{n+1}^2 - a_n^2) \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.
4. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, הופריכו: הסדרה מתכנסת לגבול סופי.
5. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, הופריכו: לכל n מתקיים כי $a_n < \frac{1}{n}$, וכן $a_n \to 0$.
6. תהיינה שלוש סדרות המקיימות לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n \leq b_n \leq c_n$, כך ש $c_n - a_n \to 0$ וכן $b_n \to L$, הופריכו: $a_n, c_n \to L$.
7. תהי סדרה כך ש $a_1 = 2$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$, הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.
8. יהיו $a_1, b_1 > 0$ ונגדיר זוג סדרות ע"י $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לגבול סופי.

   בנוסף, הופריכו: $\lim a_n = \lim b_n$.
9. תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה רציפה, הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$.
10. **תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה עולה (לאו דווקא רציפה), הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$.
11. תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(x) > m$, הופריכו: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(x) > m + \varepsilon$.
12. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שאין לה קיצון מקומי, הופריכו: f מונוטונית (עולה או יורדת).
13. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהיא מונוטונית (עולה או יורדת), הופריכו: אין לf מקסימום.
14. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה וחסומה, הופריכו: $\lim_{x \to \infty} f(x)$ קיים וסופי.
15. יהי $K \in \mathbb{R}$ ותהי f המקיימת לכל $x_1, x_2 \in [a,b]$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.
16. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, ותהיינה סדרות a_n, b_n כך ש $a_n - b_n \to 0$, הופריכו: $f(a_n) - f(b_n) \to 0$.
17. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, הוכיחו כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$.
18. הופריכו: לכל פולינום מדרגה אי זוגית יש שורש ממשי.
19. תהיינה $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי $f(x) = g(x)$, הופריכו: $f = g$.
20. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה לכל $x \neq 1$ כך שלכל $p, q \in \mathbb{Z}$ כך ש $q \neq 0, q \neq p$ מתקיים כי $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q}{q-p}$.

    הופריכו: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ לכל $1 \neq x \in \mathbb{R}$.

21. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בכל $x\in\mathbb{Q}$ הופריכו: קיימת $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך ש$f(x)=g(x)$ לכל $x\in\mathbb{Q}$.

22. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים ויהי $0<T\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x+T)=f(x)$.

הופריכו: קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{T}{2}\right)$.

23. תהי f רציפה ב$[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$, הופריכו: לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

24. תהי f מונוטונית עולה המוגדרת בכל הממשיים, הופריכו: כל נקודת אי רציפות שלה היא ממין ראשון (קפיצתית).

25. תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ מונוטונית ועל, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.

26. הופריכו: קיימת $f:[a,b]\to[c,d]$ רציפה, כך שלכל $y\in[c,d]$ קיימים <u>בדיוק שני מקורות</u> $x_1\neq x_2\in[a,b]$ כך ש

$f(x_1)=f(x_2)=y$.

27. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x)\in\mathbb{Q}$. הופריכו: f פונקציה קבועה.

28. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(f(x))$ רציפה בכל הממשיים. הופריכו: f רציפה בכל הממשים.

חלק ב' - תרגילים הכוללים תתי סדרות וסדרות קושי:

1. תהי סדרה חסומה a_n המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי $a_{n+1}\geq a_n-\frac{1}{2^n}$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.

2. יהי $0<\mathrm{K}<1$ ותהי f המקיימת לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כי $|f(x_1)-f(x_2)|\leq K|x_1-x_2|$.

תהי סדרה המקיימת $a_{n+1}=f(a_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת $a_n\to c\in\mathbb{R}$ וכן כי $f(c)=c$.

3. תהי סדרה a_n כך שקיימים $\varepsilon>0$ ו$K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>n>K$ מתקיים כי $|a_m-a_n|\geq\varepsilon$, הופריכו: $|a_n|\to\infty$.

4. תהי סדרה כך ש$a_1=0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

5. תהיינה שלוש סדרות כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n\leq b_n\leq c_n$. עוד נניח כי $liminf\, a_n=limsup\; c_n=L$.

הופריכו: $b_n\to L$.

6. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהגבולות $\lim_{x\to\infty}f(x)$,$\lim_{x\to(-\infty)}f(x)$ קיימים וסופיים. הופריכו: f חסומה.

<u>פתרונות</u>

1. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} \to 0$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר סדרה $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$.

ברור ש $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ נותר להוכיח כי $a_n \to 0$.

קל להוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $0 \le a_n \le 1$ ולכן $|a_{n+1}| = \frac{a_n^2}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$ ולפי חצי סנדוויץ' על הרצפה מתקיים כי

$a_{n+1} \to 0$ ולכן $a_n \to 0$.

2. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_n^2}{a_{n+1}} \to 0$.

<u>הוכחה</u>: הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ שואפת לאפס ומתקיים כי

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$$

3. תהי סדרה a_n המקיימת כי $(a_{n+1}^2 - a_n^2) \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.

הפרכה: נביט בסדרה $a_n = \ln(n)$ ששואפת לאינסוף.

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = (\ln(n+1) - \ln(n))(\ln(n+1) + \ln(n)) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\big((n+1)n\big) =$$

$$= \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n^2+n)}\right)$$

כעת נחשב את הגבול בתוך הלוג לפי כלל הe:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n^2+n)} \to e^{\lim\left(\ln(n^2+n)\left(1+\frac{1}{n}-1\right)\right)} = e^0 = 1$$

כיוון ש

$$\ln(n^2+n)\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{\ln(n) + \ln(n+1)}{n} \to 0$$

ולכן

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 \to \ln(1) = 0$$

כעת

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$$

4. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$, הופריכו: הסדרה מתכנסת לגבול סופי.

<u>הוכחה</u>:

$$a_{n+1} - a_n \le -a_n^2 \le 0$$

לכן מדובר בסדרה מונוטונית יורדת, וכיוון שהיא חיובית היא חסומה מלרע ע"י אפס ולכן מתכנסת למספר סופי.

5. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$, הופריכו: לכל n מתקיים כי $a_n < \frac{1}{n}$, וכן $a_n \to 0$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה.

ראשית, עבור $n = 1$ צ"ל כי $a_n < 1$

נב"ש (נניח בשלילה) כי $a_n \ge 1$. נעביר אגף בנתון $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$ ונקבל:

$$a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1) \ge 0 > -a_{n+1}$$

בסתירה.

בהנתן n עבורו $a_n < \frac{1}{n}$ נוכיח כי $a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$

מהנתון ע"י העברת אגפים נקבל כי

$$a_{n+1} \le a_n - a_n^2$$

המקסימום של של הפרבולה הבוכה $x - x^2$ הוא בקודקוד $x = \frac{1}{2}$ והוא שווה ל$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$.

לכן עבור $n = 1$ מקבלים כי $a_2 \le \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

עבור $n \geq 2$ המקסימום של הפרבולה הבוכה $x - x^2$ בקטע $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ הוא בנקודה $x = \frac{1}{n}$

(הרי קודקוד הפרבולה ב$x = \frac{1}{2}$ והיא חותכת את הציר ב$x = 0,1$)

לכן כיוון ש $0 < a_n < \frac{1}{n}$ נובע כי

$$a_n - a_n^2 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{n^2-1}{n^2(n+1)} < \frac{n^2}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

6. תהיינה שלוש סדרות המקיימות לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n \leq b_n \leq c_n$, כך ש $c_n - a_n \to 0$ וכן $b_n \to L$, הופריכו: $a_n, c_n \to L$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נחסיר a_n משלושת אגפי אי השיוויון ונקבל כי

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ' נקבל כי

$$b_n - a_n \to 0$$

ולכן גם

$$b_n - c_n = (b_n - a_n) + (a_n - c_n) \to 0$$

לכן

$$a_n - L = a_n - b_n + b_n - L \to 0$$

ומכאן $a_n \to L$ ובאופן דומה אפשר להראות כי $c_n \to L$.

7. תהי סדרה כך ש $a_1 = 2$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$, הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון –

ראשית נחקור מה ניתן לומר <u>**אם**</u> נניח שהסדרה מתכנסת. זה יעזור לנו להחליט מה אנחנו מעוניינים להוכיח, ולאחר מכן נעשה זאת.

<u>**אם**</u> הסדרה מתכנסת, נסמן $a_n \to L$ ולכן כמובן $a_{n+1} \to L$ ונחשב את הגבול של שני צידי נוסחאת הנסיגה:

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$$

ונקבל כי

$$L = \frac{2L-1}{L+4}$$

$$L^2 + 4L = 2L - 1$$

$$(L+1)^2 = 0$$

כלומר עד כה הוכחנו בלבד ש**אם** יש גבול, אזי הוא $L = -1$.

כעת נבדוק האם הסדרה מונוטונית וחסומה, אם כן זה **יוכיח** שיש לה גבול סופי, ולפי מה שראינו עד עכשיו אנו נדע מהו.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} - a_n = \frac{2a_n - 1 - a_n^2 - 4a_n}{a_n + 4} = -\frac{(a_n + 1)^2}{a_n + 4}$$

אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n > -1$, נובע כי $a_n + 4 > 3$ ולכן ההפרש שלילי והסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח זאת באינדוקציה.

עבור $n = 1$ מתקיים כי $a_1 = 2 > -1$

בהנתן n עבורו $a_n > -1$ מתקיים כי

$$a_n + 4 > 3$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} = \frac{2a_n + 8 - 8 - 1}{a_n + 4} = 2 - \frac{9}{a_n + 4} > 2 - \frac{9}{3} = -1$$

הוכחנו ש$a_n > -1$ מכאן נובע באופן ישיר שהיא חסומה מלרע, ובאופן עדיף שהיא מונוטונית יורדת לפי החישובים לעיל. לכן הסדרה מונוטונית וחסומה ומתכנסת לגבול סופי. הראנו שאם היא מתכנסת לגבול סופי הגבול הוא מינוס אחד.

לכן סה"כ $a_n \to -1$

8. יהיו $a_1, b_1 > 0$ ונגדיר זוג סדרות ע"י $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לגבול סופי.

בנוסף, הופריכו: $\lim a_n = \lim b_n$.

הוכחה:

ראשית קל להוכיח כי איברי שתי הסדרות חיוביים. כעת לפי אי שיוויון הממוצעים לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$b_{n+1} \leq a_{n+1}$$

הרי הממוצע הגאומטרי תמיד קטן או שווה לאלגברי.

מכאן ניתן להסיק כי לכל $n > 2$ מתקיים $b_n \leq a_n$ ולכן

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = \sqrt{b_n^2} = b_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

כלומר החל מהאיבר השני b_n עולה, וa_n יורדת.

סה"כ לכל $n \geq 2$

$$b_2 \leq b_n \leq a_n \leq a_2$$

לכן שתי הסדרות מונוטונית וחסומות ולכן מתכנסות לגבול סופי.

מעבר לכך נסמן כי $a_n \to L$ וכן $b_n \to M$ על ידי השאפת שני צידי נוסחאת הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ נקבל

$$L = \frac{L + M}{2}$$

וע"י פישוט נוכיח כי $L = M$ ולמעשה שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

9. תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה רציפה, הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$.

הוכחה: נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x) = f(x) - x$, צ"ל שקיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבור $h(c) = 0$.

הפונקציה h רציפה כצירוף של רציפות בקטע $[a,b]$, לכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחת לציר על מנת להוכיח שקיים חיתוך עם הציר.

נציב את קצוות הקטע

$$h(a) = f(a) - a \geq 0$$

זה נכון כיוון ש $f(x) \in [a,b]$ לפי הנתון, ולכן בפרט $f(a) \geq a$

באופן דומה

$$h(b) = f(b) - b \leq 0$$

וסיימנו.

10. תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה עולה (לאו דווקא רציפה), הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$.

<u>הוכחה</u>:

כיוון ש$f(a) \in [a,b]$ נובע כי $a \leq f(a)$.

נביט בקבוצה

$$A = \{x \in [a,b] | x \leq f(x)\}$$

הרגע הוכחנו שהיא אינה ריקה, וכמובן שהיא חסומה ולכן קיים לה חסם עליון

$$M = sup\, A \in [a,b]$$

לכל $x \in A$ מתקיים כי $x \leq M$ ולכן $f(x) \leq f(M)$ (כי הפונקציה עולה).

אבל כיוון ש $x \in A$ נובע כי

$$x \leq f(x) \leq f(M)$$

כלומר $f(M)$ היא חסם מלעיל של הקבוצה A, ומכיוון שM הוא החסם העליון הוא חסם המלעיל הקטן ביותר ונובע כי:

$$M \leq f(M)$$

לכן, שוב כיוון שהפונקציה עולה,

$$f(M) \leq f\big(f(M)\big)$$

כלומר בעצם $f(M) \in A$, ולכן היא קטנה מהחסם העליון של הקבוצה כלומר $f(M) \leq M$ וביחד סה"כ $M = f(M)$.

נבחר $c = M$ וקיבלנו בדיוק את מה שרצינו.

11. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $f(x)>m$, הופריכו: קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $f(x)>m+\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: לפי משפט ויירשטראס II הפונקציה f מקבלת מינימום כיוון שהיא רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, בנקודה $c\in[a,b]$.

כלומר לכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $f(c)\le f(x)$.

כעת, לפי הנתון

$$m<f(c)$$

ניקח את חצי המרחק

$$\varepsilon=\frac{f(c)-m}{2}$$

ולכן

$$m+\varepsilon=m+\frac{f(c)-m}{2}=\frac{f(c)+m}{2}$$

הוא בדיוק אמצע הקטע בין $m<m+\varepsilon<f(c)$

ולכן אכן לכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי

$$m+\varepsilon<f(x)$$

12. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שאין לה קיצון מקומי, הופריכו: f מונוטונית (עולה או יורדת).

<u>הוכחה</u>: נב"ש כי הפונקציה אינה עולה ואינה יורדת, לכן קיימים שני זוגות של נקודות

$$x_1<x_2,\quad x_3<x_4$$

כך ש

$$f(x_1)<f(x_2),\quad f(x_3)>f(x_4)$$

נביט בקטע $[a,b]$ כך ש $x_1,x_2,x_3,x_4\in(a,b)$.

לפי משפט ויירשטראס II הפונקציה מקבלת מינימום ומקסימום בקטע $[a,b]$ וכיוון שאין קיצון מקומי המקסימום והמינימום מתקבלים <u>רק</u> בקצוות.

אם $f(a)=f(b)$ הפונקציה קבועה בקטע (כי המקסימום שווה למינימום) ולכן כל הנקודות בקטע הפתוח הן קיצון מקומי בסתירה. לכן $f(a)>f(b)$ או $f(b)>f(a)$.

נניח כי $f(a) > f(b)$ (ההוכחה עבור המקרה השני דומה).

נביט בקטע $[a, x_2]$. שוב לפי ויירשטראס הפונקציה מקבלת מקסימום ומינימום בקטע.

כיוון ש $f(x_1) < f(x_2)$ המינימום לא מתקבל בקצה הימני.

כמו כן, כיוון ש$f(a)$ היא המקסימום ב$[a, b]$ נובע כי $f(a) > f(x_1)$.

לכן המינימום בקטע $[a, x_2]$ לא מתקבל בקצוות, אלא בפנים הקטע (בנקודה בה הערך קטן או שווה ל$f(x_1)$), ולכן יש מינימום מקומי, בסתירה.

13. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהיא מונוטונית (עולה או יורדת), הופריכו: אין לf מקסימום.

הפרכה: פונקציה קבועה הינה מונוטונית ומקבלת את המקסימום (והמינימום) בכל נקודה.

14. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה וחסומה, הופריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים וסופי.

<u>הוכחה</u>: ההוכחה דומה לסדרות מונוטוניות וחסומות.

נסמן את החסם העליון של הפונקציה בM.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K \in \mathbb{R}$ כך ש $M - \varepsilon < f(K) \leq M$ וכיוון שהפונקציה עולה לכל $x > K$ מתקיים כי

$$M - \varepsilon < f(K) \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon$$

והוכחנו כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = M$$

אפשר להוכיח באופן דומה כי אם הפונקציה אינה חסומה מלעיל היא שואפת לאינסוף באינסוף.

15. יהי $K \in \mathbb{R}$ ותהי f המקיימת לכל $x_1, x_2 \in [a, b]$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$, הופריכו: f רציפה ב$[a, b]$.

<u>הוכחה</u>:

תהי $x_n \in [a, b]$ כך ש $x_n \to x_0$ צ"ל כי $f(x_n) \to f(x_0)$

זה שקול לכך ש $f(x_n) - f(x_0) \to 0$ אכן

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq K|x_n - x_0| \to 0$$

ולפי חצי סנדוויץ' על הרצפה סיימנו.

16. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, ותהיינה סדרות a_n, b_n כך ש $a_n - b_n \to 0$, הופריכו: $f(a_n) - f(b_n) \to 0$.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x) = x^2$ שהינה רציפה בכל הממשיים, ונביט בזוג הסדרות

$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

$$b_n = n$$

כעת

$$a_n - b_n = \frac{1}{n} \to 0$$

אך

$$f(a_n) - f(b_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 - \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$$

17. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, הוכיחו כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה

$f\big(f(x)\big) = x$.

<u>הוכחה</u>:

בכיוון ראשון, נניח כי קיימת נקודה c עבורה $f(c) = c$

לכן

$$f\big(f(c)\big) = f(c) = c$$

ואותה נקודה הינה פתרון למשוואה השנייה.

בכיוון השני, נניח כי קיימת נקודה c עבורה $f\big(f(c)\big) = c$

כעת עלינו להוכיח כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$. נעביר אגב ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - x$$

עלינו להוכיח שלh h יש חיתוך עם ציר האיקס.

h רציפה כצירוף של רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחת לציר.

נציב בפונקציה את $c, f(c)$

$$h(c) = f(c) - c$$

$$h\big(f(c)\big) = f\big(f(c)\big) - f(c) = c - f(c) = -h(c)$$

כיוון שמצאנו שני ערכים של הפונקציה $h(c), h\big(f(c)\big)$ עם סימנים מנוגדים, סיימנו.

18. הופריכו: לכל פולינום מדרגה אי זוגית יש שורש ממשי.

<u>הוכחה</u>: יהי פולינום

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_0$$

כך ש $a_{2n+1} > 0$ (ההוכחה עבור מקדם שלילי דומה).

מה עושים בחדו"א שלא יודעים להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right) = \{\infty \cdot a_{2n+1}\} = \infty$$

באופן דומה

$$\lim_{x\to(-\infty)} p(x) = \lim_{x\to(-\infty)} x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right) = \{-\infty \cdot a_{2n+1}\} = -\infty$$

לכן קיימות נקודות כך ש

$$p(x_1) > 0 \qquad p(x_2) < 0$$

וכיוון שפולינום הוא פונקציה רציפה לפי משפט ערך הביניים הוא חייב לחתוך את הציר.

19. תהיינה $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי $f(x) = g(x)$, הופריכו: $f = g$.

<u>הוכחה</u>:

תהי נקודה $x \in \mathbb{R}$ נבחר סדרה $x_n \to x$ כך שלכל n מתקיים כי $x_n \in \mathbb{Q}$

כיוון שהפונקציות רציפות מתקיים

$$f(x_n) \to f(x), \quad f(x_n) \to g(x)$$

אך לפי הנתון $f(x_n) = g(x_n)$ ולכן $f(x) = g(x)$.

20. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה לכל $x\neq 1$ כך שלכל $p,q\in\mathbb{Z}$ כך ש $q\neq 0, q\neq p$ מתקיים כי $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{q}{q-p}$.

הופריכו: $f(x)=\frac{1}{1-x}$ לכל $1\neq x\in\mathbb{R}$.

<u>הוכחה:</u>

תהי $1\neq x\in\mathbb{Q}$. קיימים $p,q\in\mathbb{Z}$ כך ש $q\neq 0, q\neq p$ וכן $x=\frac{p}{q}$. לכן

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{p}{q}}=\frac{q}{q-p}=f\left(\frac{p}{q}\right)$$

כיוון שהפונקציות $f(x)$, $\frac{1}{1-x}$ רציפות לכל $x\neq 1$ ושוות על הרציונאליים ששונים מ1 הן שוות לכל $x\neq 1$ (בדומה לתרגיל קודם).

21. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בכל $x\in\mathbb{Q}$ הופריכו: קיימת $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך ש$g(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{Q}$.

הפרכה:

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{2}}$ רציפה בכל הרציונאליים. תהי g השווה לf בכל הרציונאליים.

תהי $\sqrt{2}<x_n\to\sqrt{2}$ כך שלכל n מתקיים כי $x_n\in\mathbb{Q}$ אזי

$$g(x_n)=f(x_n)=\frac{1}{x_n-\sqrt{2}}=\left\{\frac{1}{0^+}\right\}=\infty$$

לכן לפונקציה g אין גבול סופי בנקודה $\sqrt{2}$ ולכן אינה רציפה שם.

22. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים ויהי $0<T\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x+T)=f(x)$.

הופריכו: קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{T}{2}\right)$.

<u>הוכחה:</u> נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{T}{2}\right)$$

עלינו להוכיח שהפונקציה h חותכת את ציר האיקס.

הפונקציה h רציפה כצירוף רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחתיו.

נציב את הנקודות $0,\frac{T}{2}$ ונזכור שלפי הנתון

$$f(T)=f(0+T)=f(0)$$

$$h(0)=f(0)-f\left(\frac{T}{2}\right)$$

$$h\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(T)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(0)=-h(0)$$

מצאנו שתי נקודות עליהן הפונקציה מקבלת סימנים מנוגדים ולכן סיימנו.

23. תהי f רציפה ב$[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$, הופריכו: לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

<u>הוכחה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}$ נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$$

צריך להוכיח שקיימת נקודה c עבורה $h(c)=0$.

הפונקציה h רציפה בתחום $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ כצירוף של רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא בתחום זה נקודה מעל הציר ונקודה מתחתיו על מנת לסיים את ההוכחה.

נציב בh את הנקודות $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$

$$h(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$h\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$h\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)$$

כעת נסכום את כל הערכים שמצאנו:

$$h(0)+h\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+h\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)$$

מרבית האיברים מצטמצמים ואנחנו נותרים עם $f(0)-f(1)$, אך לפי הנתון $f(0)=f(1)$ ולכן סה"כ מצאנו כי

$$h(0)+h\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+h\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$$

כעת חייבים להיות שני איברים בעלי סימנים מנוגדים, או שכולם מתאפסים.

כך או כך הוכחנו שהפונקציה h מתאפסת, כפי שרצינו.

24. תהי f מונוטונית עולה המוגדרת בכל הממשיים, הופריכו: כל נקודת אי רציפות שלה היא ממין ראשון (קפיצתית).

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח כי לא תתכן נקודת אי רציפות סליקה.

תהי x_0 כך ש $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ קיים וסופי, נוכיח כי $L = f(x_0)$ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה זו (ולכן לא תתכן נקודת אי רציפות סליקה).

כיוון שהפונקציה עולה, לכל $x < x_0$ מתקיים כי $f(x) \le f(x_0)$ ולכן

$$L = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$$

באופן דומה

$$L = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$$

וסה"כ קיבלנו כי $L \le f(x_0)$ וכן $L \ge f(x_0)$ ולכן $L = f(x_0)$ כפי שרצינו.

תהי x_0 כלשהי אזי כיוון שהפונקציה מונוטונית עולה.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in(-\infty,x_0)} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in(x_0,\infty)} f(x)$$

שימו לב שבקטע $(-\infty, x_0)$ הפונקציה חסומה מלעיל ע"י $f(x_0)$ ובקטע $(-\infty, x_0)$ הפונקציה חסומה מלרע ע"י $f(x_0)$.

(הוכחה דומה לכך בתרגיל קודם, ובהוכחה שסדרות מונוטוניות וחסומות מתכנסות)

כיוון ששני הגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים, אם הם שווים מדובר בנקודת רציפות, ואם הם שונים מדובר בנקודת אי רציפות ממין ראשון (קפיצתית).

25. תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ מונוטונית ועל, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: תהי $x_0 \in (a,b)$. בדומה לתרגיל קודם, כיוון שהפונקציה מונוטונית מתקיים כי הגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים.

אם הם שווים, אזי כמו בתרגיל קודם, הפונקציה רציפה בx_0.

אחרת, אם

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

נובע שאחד הצדדים לפחות אינו שווה, נטפל באחד המקרים והשני דומה.

נניח $f(x_0) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ נבחר נקודה $y \in [a,b]$ כך ש $f(x_0) < y < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (למשל אמצע הקטע) ונוכיח שלא יכול להיות לה מקור.

כיוון שהפונקציה עולה, לכל $x \le x_0$ מתקיים כי $f(x) \le f(x_0) < y$.

כעת, נתון שהפונקציה **על** ולכן קיים מקור x_1 כך ש $f(x_1) = y$, ולפי מה שראינו הרגע $x_0 < x_1$

ולכן בקטע $[x_0, x_1]$ המקסימום הוא $y = f(x_1)$ כיוון שהפונקציה עולה.

ולכן $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \le y$ בסתירה.

באופן דומה אם $\lim_{x\to a^+} f(x) > f(a)$ או $\lim_{x\to b^-} f(x) < f(b)$ אנחנו מקבלים סתירה לכך שהפונקציה על, ולכן סה"כ הפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

26. הופריכו: קיימת $f:[a,b] \to [c,d]$ רציפה, כך שלכל $y \in [c,d]$ קיימים <u>בדיוק שני מקורות</u> $x_1 \ne x_2 \in [a,b]$ כך ש $f(x_1) = f(x_2) = y$.

הפרכה: נב"ש כי קיימת פונקציה כזו.

נסמן את המקורות של c ב $a_1 < a_2$ ואת המקורות של d ב$b_1 < b_2$.

נחלק למקרים שונים של הסדר בין ארבעת הנקודות ונראה שכולם מובילים לסתירה.

מקרה ראשון $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$

ניקח נקודה כלשהי x בקטע הפתוח (a_1, a_2), כיוון שלכל איבר יש בדיוק שני מקורות ולא יותר

וכיוון ש$f(x) \in [c,d]$ נובע כי $c < f(x) < d$.

יהי גובה m כך ש $c < m < f(x)$.

לפי משפט ערך הביניים, כיוון שהפונקציה רציפה, חייבים להיות לm מקורות בשלושת הקטעים $(a_1, x), (x, a_2), (a_2, b_1)$ בסתירה.

מקרה שני $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$

עבור $m = \frac{c+d}{2}$ חייבים להיות מקורות בשלושת הקטעים $(a_1, b_1), (b_1, a_2), (a_2, b_2)$ בסתירה.

מקרה שלישי $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$

תהי נקודה $x \in (b_1, b_2)$ אזי ל$f(x)$ יש עוד שני מקורות נוספים בקטעים $(a_1, b_1), (b_2, a_2)$ בסתירה.

מקרה רביעי $b_1 < a_1 < b_2 < a_2$ דומה לשני, והמקרה החמישי ואחרון $b_1 < b_2 < a_1 < a_2$ דומה לראשון.

27. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \in \mathbb{Q}$. הופריכו: f פונקציה קבועה.

הוכחה: נב"ש כי הפונקציה אינה קבועה, לכן קיימות שתי נקודות כך ש$f(x_1) \neq f(x_2)$

בין $f(x_1), f(x_2)$ קיים מספר אי רציונלי, ולפי משפט ערך הביניים חייב להיות לו מקור כי הפונקציה רציפה, בסתירה לכך ש$f(x) \in \mathbb{Q}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

28. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש $f(f(x))$ רציפה בכל הממשיים. הופריכו: f רציפה בכל הממשים.

הפרכה:

נביט בפונקצית דיריכלה שאינה רציפה באף נקודה

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

כיוון ש $D(0) = D(1) = 1$ מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$ כי

$$D\big(D(x)\big) = 1$$

כלומר $D\big(D(x)\big)$ היא הפונקציה הקבועה שהינה רציפה בכל הממשיים.

חלק ב' - תרגילים הכוללים תתי סדרות וסדרות קושי:

1. תהי סדרה חסומה a_n המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי $a_{n+1}\geq a_n-\frac{1}{2^n}$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.

<u>הוכחה</u>: כיוון שהסדרה חסומה יש לה גבול עליון וגבול תחתון סופיים. נב"ש שהם שונים.

יהיו $m>n$ אזי

$$a_m-a_n=a_m-a_{m-1}+a_{m-1}+\cdots+a_{n+1}-a_n\geq-\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^{m-2}}-\cdots-\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{m-1-n}}+\cdots+1\right)$$

כעת סכום סדרה הנדסית חיובית סופית קטן מסכום הסדרה האינסופית:

$$\frac{1}{2^{m-1-n}}+\cdots+1<\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

לכן

$$a_m-a_n>-\frac{2}{2^n}=-\frac{1}{2^{n-1}}$$

נסמן

$$\varepsilon=\overline{\lim}\,a_n-\underline{\lim}\,a_n>0$$

כעת כיוון ש $\frac{1}{2^{n-1}}\to0$ קיים מקום K_1 אחריו לכל $n>K_1$ מתקיים כי $\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{3}$

ולכן לכל $m>n>K\_1$ מתקיים $a_m-a_n>-\frac{\varepsilon}{3}$ ולכן $a_n-a_m<\frac{\varepsilon}{3}$.

יש תת סדרה השואפת לגבול העליון, ולכן קיים K_2 אחריו איברי תת סדרה גדולים מ$\overline{\lim}\,a_n-\frac{\varepsilon}{3}$

באופן דומה יש תת סדרה השואפת לגבול התחתון ולכן קיים K_3 אחריו איברי תת הסדרה קטנים $\underline{\lim}\,a_n+\frac{\varepsilon}{3}$

נסמן $K=\max\{K_1,K_2,K_3\}$ ניקח איבר a_n מתת הסדרה השואפת לגבול העליון, כך ש $n>K$.

ניקח איבר a_m מתת הסדרה השואפת לגבול התחתון כך ש $m>n$.

סה"כ

$$\overline{\lim}\,a_n-\frac{\varepsilon}{3}<a_n$$

$$a_m<\underline{\lim}\,a_n+\frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן

$$a_n - a_m > \overline{\lim}\, a_n - \frac{\varepsilon}{3} - \left(\underline{\lim}\, a_n + \frac{\varepsilon}{3}\right) = \overline{\lim}\, a_n - \underline{\lim}\, a_n - \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

בסתירה לכך ש

$$a_n - a_m < \frac{\varepsilon}{3}$$

2. יהי $0 < \mathrm{K} < 1$ ותהי f המקיימת לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$.

תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = f(a_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת $a_n \to c \in \mathbb{R}$ וכן כי $f(c) = c$.

<u>הוכחה</u>: נראה כי מדובר בסדרת קושי ולכן היא מתכנסת.

$$|a_3 - a_2| = |f(a_2) - f(a_1)| \leq K|a_2 - a_1|$$

$$|a_4 - a_3| = |f(a_3) - f(a_2)| \leq K|a_3 - a_2| \leq K^2|a_2 - a_1|$$

ניתן להוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$|a_{n+1} - a_n| < K^{n-1}|a_2 - a_1|$$

כעת, יהיו $m > n$ מתקיים כי

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\leq K^{m-2}|a_2 - a_1| + \cdots + K^{n-1}|a_2 - a_1| = K^{n-1}|a_2 - 1|(K^{m-n-1} + \cdots + 1)$$

כעת סכום סדרה הנדסית חיובית סופית קטן מסכום הסדרה האינסופי

$$K^{m-n-1} + \cdots + 1 < \sum_{k=0}^{\infty} K^k = \frac{1}{1-K}$$

הטור ההנדסי מתכנס הרי $0 < K < 1$. לכן סה"כ

$$|a_m - a_n| \leq \frac{K^{n-1}}{1-K}|a_2 - a_1| \to 0$$

הגבול שואף לאפס, שוב כיוון ש $0 < K < 1$.

לכן קיים מקום N אחריו לכל $n > N$ מתקיים כי $\frac{K^{n-1}}{1-K}|a_2 - a_1| < \varepsilon$

ובפרט לכל $m > n > N$ מתקיים כי $|a_m - a_n| < \varepsilon$

3. תהי סדרה a_n כך שקיימים $\varepsilon > 0$ ו-$K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n > K$ מתקיים כי $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$, הופריכו: $|a_n| \to \infty$.

<u>הוכחה</u>: כיוון ש$|a_n| \geq 0$ הגבולות החלקיים שלה אינם שליליים, ובוודאי $-\infty$ אינו גבול חלקי.

לכן אם $|a_n| \nrightarrow \infty$ אזי יש לה גבול חלקי סופי, נב"ש שזה המצב.

תהי תת סדרה המתכנסת לגבול סופי

$$a_{k_n} \to L \in \mathbb{R}$$

קיים מקום N שאחריו לכל $n > N$ מתקיים כי

$$\left|a_{k_n} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח $n > \max\{N, K\}$ ולכן

$$\left|a_{k_n} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|a_{k_{n+1}} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

וכיוון ש $a_{k_n}, a_{k_{n+1}} \in \left(L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

נובע כי

$$\left|a_{k_{n+1}} - a_{k_n}\right| < \varepsilon$$

בסתירה לנתון, הרי $k_{n+1} > k_n > n > K$.

4. תהי סדרה כך ש$a_1 = 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון –

מבט זריז באיברי הסדרה הראשונים $0,2,\frac{2}{3},\frac{6}{5},\frac{10}{11}, \ldots$ מעלה את הרעיון לחלק את הסדרה לשתי תתי סדרות מונוטוניות.

ראשית, נביע איבר בסדרה בעזרת הקודם-קודם לו.

לכל $n > 1$ מתקיים כי:

$$a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n}=\frac{2}{1+\frac{2}{1+a_{n-1}}}=\frac{2}{\left(\frac{1+a_{n-1}+2}{1+a_{n-1}}\right)}=\frac{2+2a_{n-1}}{3+a_{n-1}}$$

כעת נבחן את ההפרש בין איבר לאיבר הקודם קודם לו:

$$a_{n+1}-a_{n-1}=\frac{2+2a_{n-1}}{3+a_{n-1}}-a_{n-1}=\frac{2+2a_{n-1}-3a_{n-1}-a_{n-1}^2}{3+a_{n-1}}=\frac{-a_{n-1}^2-a_{n-1}+2}{3+a_{n-1}}=\frac{-(a_{n-1}+2)(a_{n-1}-1)}{3+a_{n-1}}$$

קל להוכיח באינדוקציה כל כי איברי הסדרה אי שליליים, ולכן איבר גדול מהקודם קודם לו אם ורק אם הוא קטן מ1, וקטן מהקודם קודם לו אם ורק אם הוא גדול מ1.

נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_{2n-1}<1$ ולכן מדובר בתת סדרה מונוטונית עולה (וחסומה מלעיל ע"י 1) ולכן מתכנסת לגבול סופי (שנחשב בהמשך).

כמו כן נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_{2n}>1$ ולכן מדובר בתת סדרה מונוטונית יורדת (וחסומה מלרע ע"י 1) ולכן מתכנסת גם היא לגבול סופי (שנחשב בהמשך).

נעזר באינדוקציה:

$$a_1=0<1$$

יהי n עבורו $a_{2n-1}<1$ נוכיח כי $a_{2n+1}<1$

$$a_{2n+1}=\frac{2+2a_{2n-1}}{3+a_{2n-1}}$$

נפתור את אי השיוויון

$$\frac{2+2a_{2n-1}}{3+a_{2n-1}}<1$$

נכפול במכנה החיובי

$$2+2a_{2n-1}<3+a_{2n-1}$$

זה נכון אם ורק אם

$$a_{2n-1}<1$$

וזו בדיוק הנחת האינדוקציה.

באופן דומה ניתן להוכיח באינדוקציה כי $a_{2n}>1$ לכל n.

כעת שתי תתי הסדרות מונוטוניות וחסומות ולכן מתכנסות לגבולות סופיים.

נסמן $a_{2n+1} \to L$ חשב את גבול שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$a_{2n+1} = \frac{2 + 2a_{2n-1}}{3 + a_{2n-1}}$$

ונקבל כי

$$L = \frac{2 + 2L}{3 + L}$$

(כיוון שהסדרה אי שלילית הגבול אינו שלילי ואין סכנה של חלוקה באפס)

$$3L + L^2 = 2 + 2L$$

$$L^2 + L - 2 = 0$$

$$(L + 2)(L - 1) = 0$$

כאמור, הגבול אינו שלילי ולכן בהכרח $L = 1$.

באופן דומה לחלוטין נובע כי $a_{2n} \to 1$

לכן הן תת הסדרה במקומות הזוגיים והן תת הסדרה במקומות הזוגיים שואפות ל1. כיוון שמדובר במספר סופי של תתי סדרות המכילות את כל איברי הסדרה ושואפות לאותו גבול נובע כי זה גבול הסדרה.

כלומר הוכחנו ש $a_n \to 1$.

5. תהיינה שלוש סדרות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n \le b_n \le c_n$. עוד נניח כי $liminf\, a_n = limsup\, c_n = L$.

הופריכו: $b_n \to L$.

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon > 0$

כיוון ש $\underline{\lim}\, a_n = L$ קיים מקום K_1 שאחריו לכל $n > K_1$ מתקיים כי $a_n > L - \varepsilon$

(אחרת היו אינסוף איברי סדרה שקטנים מ$L - \varepsilon$ ומתוכם היה מתקבל גבול חלקי שקטן מהגבול התחתון בסתירה).

באופן דומה, כיוון ש $\overline{\lim}\, c_n = L$ קיים מקום K_2 שאחריו לכל $n > K_2$ מתקיים כי $c_n < L + \varepsilon$

נבחר $K = \max\{K_1, K_2\}$ ואחריו לכל $n > K$ מתקיים כי

$$L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$$

ולכן הוכחנו כי $a_n \to L$ לפי ההגדרה.

6. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהגבולות $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$ קיימים וסופיים. הופריכו: f חסומה.

<u>הוכחה</u>:

נב"ש שהפונקציה אינה חסומה מלעיל (הוכחה עבור חסם מלרע דומה).

לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת נקודה $x_n \in \mathbb{R}$ כך ש

$$f(x_n) > n$$

לכן לפי חצי סנדוויץ' מתקיים כי

$$\lim f(x_n) = \infty$$

ניקח תת סדרה של x_n המתכנסת במובן הרחב לגבול סופי או אינסוף

$$x_{k_n} \to L$$

אם $L \in \mathbb{R}$ סופי אזי כיוון שהפונקציה רציפה ב$x = L$ מתקיים כי

$$f\left(x_{k_n}\right) \to f(L)$$

בסתירה לכך ש

$$f\left(x_{k_n}\right) \to \infty$$

כמו כן, אם $L = \infty$

כיוון שנתון שהגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים וסופי, $f\left(x_{k_n}\right)$ שואפת אליו ולא לאינסוף בסתירה.

כמובן שאם $L = -\infty$ אנחנו מקבלים סתירה באופן דומה, הרי גם שם הגבול סופי.

Yeet.