

מבחן מועד ב' בקורס 82-218 תשפ"א

תורת החבורות

מרצים: בארי גרינפלד ותומר באואר
מתרגלת: תמר בר-און

הוראות

1. **משך המבחן** הוא שעתיים, ועוד עשר דקות לסריקה והעלאה של התשובות.
2. **הניקוד** הסופי של השאלות יהיה 35, 30, 25 ו-10 נקודות מן התשובה הטובה ביותר שלכם לפחות טובה.
3. **חומר העזר** הוא לכל היותר שני דפים של טקסט כתוב או מודפס שאתם הכנתם מראש. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשבון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
5. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.
6. **אין להשתמש במחשב** במהלך המבחן פרט לצפייה בטופס ולהגשת הפתרון.
7. **מהלך המבחן יוקלט** בתוכנת זום. יש לכוון לפחות מצלמה אחת כך שבשדה הראייה של המצלמות רואים את הדפים שלכם, הפנים והידיים שלכם. שימו לב שהמבחן מוקלט ונקפיד על שמירה על טוהר הבחינות.
8. לשאלות במהלך המבחן סגל הקורס יעבור בין החדרים ותועברו לחדר זום פרטי. הודיעו למשגיחים לפני שימוש במחשב במקרה הצורך. לתקלות טכניות שלחו אימייל למרצים.
9. בשאלות שבהן התשובה הסופית היא מספר או נוסחה סגורה אין להשתמש עבודה בסימן הסכום \sum , סימן המכפלה \prod או שלוש נקודות.
10. מותר לצטט ללא הוכחה כל טענה שהוכחנו בהרצאה. החומר למבחן הוא בחיתוך החומר של שתי קבוצות ההרצאה.

עצות בכתובה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. ניתן לפתור את המבחן ללא שום דף נוסחאות.
2. בכתבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.
3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.
4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות...", "ברור ש...", "מסיקים מייד כי...", אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומייד.
5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

שאלות

שאלה 1. מצאו ארבע חבורות שונות מסדר $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, והוכיחו שהן לא איזומורפיות זו לזו.

הערה: יש בדיוק 20 חבורות מסדר 2020 עד כדי איזומורפיזם.

שאלה 2. יהי $n \geq 4$ טבעי ונתבונן בחבורה $G = S_n$. מצאו כמה תת-חבורות של G צמודות ל- A_{n-1} , שהיא תת-החבורה של כל התמורות הזוגיות על $\{1, \dots, n-1\}$ המשאירות את n במקום.

שאלה 3. תהי G חבורה מסדר $1265 = 5 \cdot 11 \cdot 23$. הוכיחו כי ל- G יש תת-חבורה נורמלית מאינדקס 5.

שאלה 4. תהי חבורה G הפועלת על קבוצה לא ריקה X . נאמר שהפעולה היא פתוגדת אם המייצב של כל איבר ב- X הוא טריוויאלי.

א. (5 נק') נניח כי G ו- X סופיות. הוכיחו שאם G פועלת בצורה מתנדנדת על X , אז הסדר של G מחלק את $|X|$.

ב. (15 נק') תהי G חבורה סופית, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה לא טריוויאלית ו- $N \triangleleft G$ תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית. אזי H פועלת על הקבוצה $N \setminus \{e\}$ על ידי הצמדה (אין צורך להוכיח שזו פעולה). נניח כי פעולה זו היא מתנדנדת וטרנזיטיבית. הוכיחו כי הסדר של G זוגי ואיננו חזקה של 2.

ג. (5 נק') תנו דוגמה לחבורה G ותת-חבורות $H, N \leq G$ המקיימות את תנאי הסעיף הקודם.

בהצלחה!