תרגיל 7

הגדרות וסימונים

ניישר קו בין קבוצות ההרצאה והתרגול לצורך התרגיל:

1. מרחב (X,τ) הוא B_2 אם קיים לו בסיס בן מניה.
2. הטופולוגיה הקו־מנייתית (לפעמים נקראת גם קו־בת־מניה) על קבוצה X מוגדרת ע"י

$$\tau_{cof} := \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid |O^c| < \infty\}$$

3. פרה־בסיס (נקרא גם תת בסיס) על מרחב טופולוגי (X,τ) הוא קבוצה של קבוצות פתוחות $\alpha \subseteq \tau$ כך ש־$\alpha^{\cap_F}$ (כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של קבוצות מ־α) הוא בסיס.
ישנו משפט שאומר שכל כיסוי α פתוח של X (כלומר אוסף של קבוצות פתוחות כך ש־$X = \bigcup \alpha$) הוא פרה־בסיס של $\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}$.

תרגילים

1. הוכיחו שאם (X,τ) הוא מרחב B_2 אז $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.
2. מצאו מתי הטופולוגיה הקו־בת־מניה (X,τ_{coc}) היא B_2.
3. הראו שבמרחב טופולוגי (X,τ) שהוא B_2 לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי בן מניה. כיסוי פתוח הוא אוסף $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ של תתי קבוצות פתוחות כך ש־$X = \bigcup_{i\in I} O_i$. תת כיסוי הוא תת קבוצה $J \subseteq I$ כך ש־$\{O_j\}_{j\in J}$ כיסוי.
4. הראו שאם (X,τ) הוא B_2 אז לכל בסיס γ יש תת קבוצה בת מניה $\gamma' \subseteq \gamma$ שמהווה בסיס לטופולוגיה גם היא.
5. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ משפחה של תתי קבוצות. לכל $A \in \mathcal{J}$ ו־$\varepsilon > 0$ נגדיר

$$W_A(\varepsilon) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in A : |f(x)| < \varepsilon \right\} \subseteq \mathbb{R}^X$$

נגדיר גם

$$\alpha_{\mathcal{J}} := \left\{ f + W_A(\varepsilon) \mid f \in \mathbb{R}^X, A \in \mathcal{J}, \varepsilon > 0 \right\}$$

שימו לב שחיבור של פונקציה עם קבוצה מוגדר לפי

$$\forall f \in \mathbb{R}^X, \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^X : f + \mathcal{A} := \{f + g \mid g \in \mathcal{A}\}.$$

הראו ש־$\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא תמיד פרה־בסיס ל־$\mathbb{R}^X$. בנוסף, עבור כל אחת מהאפשרויות הבאות ל־$\mathcal{J}$ קבעו אם $\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא בסיס. הוכיחו את טענותיכם.

(א) $\mathcal{J}_1 := \{\{x\} \mid x \in X\}$ ־ כלומר קבוצת כל הנקודונים

(ב) $\mathcal{J}_2 := \{F \subseteq X \mid |F| < \infty\}$ ־ כלומר קבוצת הקבוצות הסופיות.

(ג) $\mathcal{J}_3 := \{B \subseteq X \mid B \text{ is bounded}\}$ ־ כלומר כל הקבוצות החסומות (כאן צריך להניח ש־X הוא מטרי)

(ד) $\mathcal{J}_4 := \{B \subseteq X \mid B \text{ is connected}\}$ ־ כלומר כל הקבוצות הקשירות

(ה) $\mathcal{J}_5 := \{X\}$

6. בסימונים של התרגיל הקודם, מצאו את היחסים בין הטופולוגיות שמושרות ע"י $\alpha_{\mathcal{J}_1}, \alpha_{\mathcal{J}_2}, \alpha_{\mathcal{J}_3}, \alpha_{\mathcal{J}_4}, \alpha_{\mathcal{J}_5}$ במקרים הבאים:

(א) $X = \mathbb{R}$

(ב) $X = \mathbb{Q}$

(ג) $X = [0,1]$

(ד) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2n, 2n+1]$