תרגילי הכנה למבחן בחדו"א (אינפי) 1 ופתרונותיהם – ינואר 2021

להלן, 'הופריכו' = 'הוכיחו או הפריכו'.

חלק א' -

1. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} \to 0$.
2. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_n^2}{a_{n+1}} \to 0$.
3. תהי סדרה a_n המקיימת כי $(a_{n+1}^2 - a_n^2) \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.
4. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, הופריכו: הסדרה מתכנסת לגבול סופי.
5. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, הופריכו: לכל n מתקיים כי $a_n < \frac{1}{n}$, וכן $a_n \to 0$.
6. תהיינה שלוש סדרות המקיימות לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n \leq b_n \leq c_n$, כך ש $c_n - a_n \to 0$ וכן $b_n \to L$, הופריכו: $a_n, c_n \to L$.
7. תהי סדרה כך ש $a_1 = 2$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$, הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.
8. יהיו $a_1, b_1 > 0$ ונגדיר זוג סדרות ע"י $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לגבול סופי.

   בנוסף, הופריכו: $\lim a_n = \lim b_n$.
9. תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה רציפה, הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$.
10. **תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה עולה (לאו דווקא רציפה), הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$.
11. ***תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ פונקציה עולה (לאו דווקא רציפה), הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a,b]$ עבורה $f(c) = c$,

    כך ש f רציפה בנקודה c (אם c בקצה, אזי ברציפות אנחנו מתכוונים שהגובה בנקודה שווה לגבול החד צדדי בנקודה).
12. תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(x) > m$, הופריכו: קיים $\varepsilon > 0$ כך

    שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(x) > m + \varepsilon$.
13. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שאין לה קיצון מקומי, הופריכו: f מונוטונית (עולה או יורדת).
14. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהיא מונוטונית (עולה או יורדת), הופריכו: אין לf מקסימום.
15. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה וחסומה, הופריכו: $\lim_{x \to \infty} f(x)$ קיים וסופי.
16. יהי $K \in \mathbb{R}$ ותהי f המקיימת לכל $x_1, x_2 \in [a,b]$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.
17. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, ותהיינה סדרות a_n, b_n כך ש $a_n - b_n \to 0$, הופריכו: $f(a_n) - f(b_n) \to 0$.
18. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, הוכיחו כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה

    $f(f(x)) = x$.
19. הופריכו: לכל פולינום מדרגה אי זוגית יש שורש ממשי.
20. תהיינה $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי $f(x) = g(x)$, הופריכו: $f = g$.

21. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה לכל $x\neq 1$ כך שלכל $p,q\in\mathbb{Z}$ כך ש $q\neq 0, q\neq p$ מתקיים כי $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{q}{q-p}$.

הופריכו: $f(x)=\frac{1}{1-x}$ לכל $1\neq x\in\mathbb{R}$.

22. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בכל $x\in\mathbb{Q}$ הופריכו: קיימת $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך ש$f(x)=g(x)$ לכל $x\in\mathbb{Q}$.

23. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים ויהי $0<T\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x+T)=f(x)$.

הופריכו: קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{T}{2}\right)$.

24. תהי f רציפה ב$[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$, הופריכו: לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

25. תהי f מונוטונית עולה המוגדרת בכל הממשיים, הופריכו: כל נקודת אי רציפות שלה היא ממין ראשון (קפיצתית).

26. תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ מונוטונית ועל, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.

27. הופריכו: קיימת $f:[a,b]\to[c,d]$ רציפה, כך שלכל $y\in[c,d]$ קיימים <u>בדיוק שני מקורות</u> $x_1\neq x_2\in[a,b]$ כך ש

$f(x_1)=f(x_2)=y$.

28. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x)\in\mathbb{Q}$. הופריכו: f פונקציה קבועה.

29. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(f(x))$ רציפה בכל הממשיים. הופריכו: f רציפה בכל הממשים.

30. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. הופריכו: f מונוטונית (עולה או יורדת).

31. תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ רציפה המקיימת לכל $x\in[-1,1]$ כי $x^2+f^2(x)=1$ וכי $f(0)=1$.

הופריכו: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ לכל $x\in[-1,1]$.

32. תהי $f:A\to\mathbb{R}$ כך שלכל שתי סדרות המקיימות $a_n-b_n\to 0$ מתקיים $f(a_n)-f(b_n)$.

הופריכו: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים כי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

33. *תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל שתי סדרות $a_n-b_n\to 0$ כי $f(a_n)-f(b_n)\to 0$, הופריכו: $\frac{f(x)}{x}$ חסומה.

34. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך ש$f(1)=1$, הופריכו: קיימת $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=-\ln(c)$.

35. תהי f רציפה בקטע $(a,b]$, הופריכו: f חסומה מלעיל או שהיא חסומה מלרע.

36. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה וחיובית בכל הממשיים כך ש $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, קיימת נקודה c עבורה $f(c)=c$.

37. מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ בקטע $[1,\infty)$, או שהוכיחו שאינם קיימים.

38. תהי f כך ש$f'(x)>1$ לכל $x\in\mathbb{R}$, יהי $a_1\in\mathbb{R}$ ונגדיר סדרה ע"י $a_{n+1}=f(a_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$. הופריכו: $|a_n|\to\infty$.

39. תהי $f(x)$ המקיימת $f'(0)=1$, יהי $m>1$ וכן לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f''(x)\leq 0$. חשבו את $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$.

40. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)<x$ וכן $f(0)=0$.

הופריכו: לכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)<\frac{x^2}{2}$.

41. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)<x$ וכן $f(0)=0$.

חשבו את $\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x)$.

42. תהי f עבורה $f(x)f'(x)\geq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, הופריכו: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x)\geq 0$.

43. תהי f עבורה $f(x)f'(x)\geq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, וכן $f(0)=0$ הופריכו: לכל $x<0$ מתקיים כי $f(x)=0$.

44. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך ש$f\big(f(x)\big)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הופריכו: קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש

$\big(f'(c)\big)^2-f'(c)=0$.

45. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך ש$f\big(f(x)\big)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הופריכו: f הינה פונקציה קבועה או שהינה

פונקצית הזהות.

46. תהי f המקיימת $f(x)>0$ וכן $f''(x)<0$ לכל $0<x\in\mathbb{R}$. הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

47. הופריכו: קיימת פונקציה f המקיימת $f(x)>0$ וכן $f''(x)<0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

48. תהי f המקיימת $f(x)>0$ וכן $f''(x)<0$ לכל $0<x\in\mathbb{R}$. הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

49. תהי f המקיימת $f''(x)<0$ לכל $x\in(0,1)$, הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$.

50. תהי f המקיימת $f''(x)<0$ לכל $x\in(1,\infty)$, הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

51. תהי f המקיימת $f''(x)<0$ וכן $f'(x)<0$ לכל $x>0$. הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

52. תהי f רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b), הופריכו: f' חסומה בקטע (a,b).

53. תהי תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך ש $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, הופריכו: קיימת נקודה c עבורה $f'(c)=0$.

54. תהי f כך ש $f''(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, הופריכו: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

55. תהי f בעלת נגזרת מונוטונית עולה כך ש $f'(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, הופריכו: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

56. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל הממשיים, הופריכו: f' רציפה בכל הממשיים.

57. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל הממשיים, הופריכו: f' חסומה בכל קטע סופי וסגור $[a,b]$.

58. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל הממשיים כך ש $f'(0)>0$, הופריכו: קיימת סביבה של $x=0$ בה $f'>0$.

59. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f'(0)>0$, וכן $f(0)=0$ הופריכו: קיימת סביבה ימנית של $x=0$ בה $f>0$.

60. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, הופריכו: קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f\big(f(c)\big)\neq -c$.

חלק ב' - תרגילים הכוללים תתי סדרות וסדרות קושי:

61. תהי f רציפה וחסומה ב$(a,b]$, גזירה ב(a,b), כך שהגבול $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ אינו קיים, הופריכו: f' אינה חסומה ב(a,b).

62. תהי סדרה חסומה a_n המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי $a_{n+1}\geq a_n-\frac{1}{2^n}$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.

63. יהי $0 < K < 1$ ותהי f המקיימת לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$.

תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = f(a_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת $a_n \to c \in \mathbb{R}$ וכן כי $f(c) = c$.

64. תהי סדרה a_n כך שקיימים $\varepsilon > 0$ ו-$K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n > K$ מתקיים כי $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$, הופריכו: $|a_n| \to \infty$.

65. תהי סדרה כך ש-$a_1 = 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

66. תהיינה שלוש סדרות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n \leq b_n \leq c_n$. עוד נניח כי $liminf\, a_n = limsup\, c_n = L$.

הופריכו: $b_n \to L$.

67. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהגבולות $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$ קיימים וסופיים. הופריכו: f חסומה.

<u>פתרונות</u>

1. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} \to 0$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר סדרה $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$.

ברור ש $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ נותר להוכיח כי $a_n \to 0$.

קל להוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $0 \leq a_n \leq 1$ ולכן $|a_{n+1}| = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$ ולפי חצי סנדוויץ' על הרצפה מתקיים כי $a_{n+1} \to 0$ ולכן $a_n \to 0$.

2. הופריכו: קיימת סדרה a_n כך ש $a_n \to 0$ וכן $\frac{a_n^2}{a_{n+1}} \to 0$.

<u>הוכחה</u>: הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ שואפת לאפס ומתקיים כי

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$$

3. תהי סדרה a_n המקיימת כי $(a_{n+1}^2 - a_n^2) \to 0$ וכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.

הפרכה: נביט בסדרה $a_n = \ln(n)$ ששואפת לאינסוף.

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = (\ln(n+1) - \ln(n))(\ln(n+1) + \ln(n)) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\big((n+1)n\big) =$$

$$= \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n^2+n)}\right)$$

כעת נחשב את הגבול בתוך הלוג לפי כלל הe:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n^2+n)} \to e^{\lim\left(\ln(n^2+n)\left(1+\frac{1}{n}-1\right)\right)} = e^0 = 1$$

כיוון ש

$$\ln(n^2+n)\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{\ln(n) + \ln(n+1)}{n} \to 0$$

ולכן

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 \to \ln(1) = 0$$

כעת

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$$

4. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, הופריכו: הסדרה מתכנסת לגבול סופי.

<u>הוכחה</u>:

$$a_{n+1} - a_n \leq -a_n^2 \leq 0$$

לכן מדובר בסדרה מונוטונית יורדת, וכיוון שהיא חיובית היא חסומה מלרע ע"י אפס ולכן מתכנסת למספר סופי.

5. תהי סדרה $a_n > 0$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, הופריכו: לכל n מתקיים כי $a_n < \frac{1}{n}$, וכן $a_n \to 0$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה.

ראשית, עבור $n = 1$ צ"ל כי $a_1 < 1$

נב"ש (נניח בשלילה) כי $a_1 \geq 1$. נעביר אגף בנתון $a_1^2 \leq a_1 - a_2$ ונקבל:

$$a_1^2 - a_1 \leq -a_2$$

אבל

$$a_1^2 - a_1 = a_1(a_1 - 1) \geq 0 > -a_2$$

בסתירה.

בהנתן n עבורו $a_n < \frac{1}{n}$ נוכיח כי $a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$

מהנתון ע"י העברת אגפים נקבל כי

$$a_{n+1} \leq a_n - a_n^2$$

המקסימום של של הפרבולה הבוכה $x - x^2$ הוא בקודקוד $x = \frac{1}{2}$ והוא שווה ל$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$.

לכן עבור $n = 1$ מקבלים כי $a_2 \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

עבור $n \geq 2$ המקסימום של הפרבולה הבוכה $x - x^2$ בקטע $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ הוא בנקודה $x = \frac{1}{n}$

(הרי קודקוד הפרבולה ב$x = \frac{1}{2}$ והיא חותכת את הציר ב$x = 0,1$)

לכן כיוון ש $0 < a_n < \frac{1}{n}$ נובע כי

$$a_n - a_n^2 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{n^2-1}{n^2(n+1)} < \frac{n^2}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

6. תהיינה שלוש סדרות המקיימות לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n \leq b_n \leq c_n$, כך ש $c_n - a_n \to 0$ וכן $b_n \to L$, הופריכו: $a_n, c_n \to L$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נחסיר a_n משלושת אגפי אי השיוויון ונקבל כי

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$$

ולכן לפי כלל הסנדוויץ' נקבל כי

$$b_n - a_n \to 0$$

ולכן גם

$$b_n - c_n = (b_n - a_n) + (a_n - c_n) \to 0$$

לכן

$$a_n - L = a_n - b_n + b_n - L \to 0$$

ומכאן $a_n \to L$ ובאופן דומה אפשר להראות כי $c_n \to L$.

7. תהי סדרה כך ש $a_1 = 2$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$, הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון –

ראשית נחקור מה ניתן לומר **<u>אם</u>** נניח שהסדרה מתכנסת. זה יעזור לנו להחליט מה אנחנו מעוניינים להוכיח, ולאחר מכן נעשה זאת.

<u>אם</u> הסדרה מתכנסת, נסמן $a_n \to L$ ולכן כמובן $a_{n+1} \to L$ ונחשב את הגבול של שני צידי נוסחאת הנסיגה:

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$$

ונקבל כי

$$L = \frac{2L - 1}{L + 4}$$

$$L^2 + 4L = 2L - 1$$

$$(L + 1)^2 = 0$$

כלומר עד כה הוכחנו בלבד ש**אם** יש גבול, אזי הוא $L = -1$.

כעת נבדוק האם הסדרה מונוטונית וחסומה, אם כן זה **יוכיח** שיש לה גבול סופי, ולפי מה שראינו עד עכשיו אנו נדע מהו.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} - a_n = \frac{2a_n - 1 - a_n^2 - 4a_n}{a_n + 4} = -\frac{(a_n + 1)^2}{a_n + 4}$$

אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n > -1$, נובע כי $a_n + 4 > 3$ ולכן ההפרש שלילי והסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח זאת באינדוקציה.

עבור $n = 1$ מתקיים כי $a_1 = 2 > -1$

בהנתן n עבורו $a_n > -1$ מתקיים כי

$$a_n + 4 > 3$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} = \frac{2a_n + 8 - 8 - 1}{a_n + 4} = 2 - \frac{9}{a_n + 4} > 2 - \frac{9}{3} = -1$$

הוכחנו ש$a_n > -1$ מכאן נובע באופן ישיר שהיא חסומה מלרע, ובאופן עדיף שהיא מונוטונית יורדת לפי החישובים לעיל. לכן הסדרה מונוטונית וחסומה ומתכנסת לגבול סופי. הראנו שאם היא מתכנסת לגבול סופי הגבול הוא מינוס אחד.

לכן סה"כ $a_n \to -1$

8. יהיו $a_1, b_1 > 0$ ונגדיר זוג סדרות ע"י $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לגבול סופי.

בנוסף, הופריכו: $\lim a_n = \lim\ b_n$.

<u>הוכחה</u>:

ראשית קל להוכיח כי איברי שתי הסדרות חיוביים. כעת לפי אי שיוויון הממוצעים לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$b_{n+1} \leq a_{n+1}$$

הרי הממוצע הגאומטרי תמיד קטן או שווה לאלגברי.

מכאן ניתן להסיק כי לכל $n > 2$ מתקיים $b_n \leq a_n$ ולכן

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = \sqrt{b_n^2} = b_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

כלומר החל מהאיבר השני b_n עולה, וa_n יורדת.

סה"כ לכל $n \geq 2$

$$b_2 \leq b_n \leq a_n \leq a_2$$

לכן שתי הסדרות מונוטונית וחסומות ולכן מתכנסות לגבול סופי.

מעבר לכך נסמן כי $a_n \to L$ וכן $b_n \to M$ על ידי השאפת שני צידי נוסחאת הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ נקבל

$$L = \frac{L + M}{2}$$

וע"י פישוט <u>נוכיח</u> כי $L = M$ ולמעשה שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

9. תהי $f: [a, b] \to [a, b]$ פונקציה רציפה, הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a, b]$ עבורה $f(c) = c$.

<u>הוכחה</u>: נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x) = f(x) - x$, צ"ל שקיימת נקודה $c \in [a, b]$ עבור $h(c) = 0$.

הפונקציה h רציפה כצירוף של רציפות בקטע $[a, b]$, לכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחת לציר על מנת להוכיח שקיים חיתוך עם הציר.

נציב את קצוות הקטע

$$h(a) = f(a) - a \geq 0$$

זה נכון כיוון ש $f(x) \in [a, b]$ לפי הנתון, ולכן בפרט $f(a) \geq a$

באופן דומה

$$h(b) = f(b) - b \leq 0$$

וסיימנו.

10. תהי $f: [a, b] \to [a, b]$ פונקציה עולה (לאו דווקא רציפה), הופריכו: קיימת נקודה $c \in [a, b]$ עבורה $f(c) = c$.

<u>הוכחה</u>:

כיוון ש$f(a) \in [a, b]$ נובע כי $a \leq f(a)$.

נביט בקבוצה

$$A = \{x \in [a, b] | x \leq f(x)\}$$

הרגע הוכחנו שהיא אינה ריקה, וכמובן שהיא חסומה ולכן קיים לה חסם עליון

$$M = sup\, A \in [a, b]$$

לכל $x \in A$ מתקיים כי $x \leq M$ ולכן $f(x) \leq f(M)$ (כי הפונקציה עולה).

אבל כיוון ש $x \in A$ נובע כי

$$x \leq f(x) \leq f(M)$$

כלומר $f(M)$ היא חסם מלעיל של הקבוצה A, ומכיוון שM הוא החסם העליון הוא חסם המלעיל הקטן ביותר ונובע כי:

$$M \leq f(M)$$

לכן, שוב כיוון שהפונקציה עולה,

$$f(M) \leq f\big(f(M)\big)$$

כלומר בעצם $f(M) \in A$, ולכן היא קטנה מהחסם העליון של הקבוצה כלומר $f(M) \leq M$ וביחד סה"כ $M = f(M)$.

נבחר $c = M$ וקיבלנו בדיוק את מה שרצינו.

11. ***תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ פונקציה עולה (לאו דווקא רציפה), הופריכו: קיימת נקודה $c\in[a,b]$ עבורה $f(c)=c$,

כך ש f רציפה בנקודה c (אם c בקצה, אזי ברציפות אנחנו מתכוונים שהגובה בנקודה שווה לגבול החד צדדי בנקודה).

הוכחה: כיוון שהפונקציה עולה וחסומה בכל נקודה קיימים גבולות חד צדדיים סופיים.

נגדיר סדרת קטעים באופן הבא;

הקטע הראשון הוא $[a_1,b_1]=[a,b]$

אם $\lim_{x\to a_1^+} f(x)=a_1$ אזי כיוון שהפונקציה מונוטונית וחסומה מלמטה ע"י $a_1=a$ נובע כי $f(a_1)=a_1$ ולכן הפונקציה רציפה

בקצה זה וכן $f(a_1)=a_1$ כלומר $c=a_1$ וסיימנו. אחרת, מתקיים כי $\lim_{x\to a_1^+} f(x)>a_1$.

באופן דומה, אם לא סיימנו אז $\lim_{x\to b_1^-} f(x)<b_1$.

נשמור על התכונה של הקטעים בה הגבול של הקצה השמאלי גדול מערך ציר האיקס של הקצה השמאלי, והגבול של הקצה

הימני קטן מערך ציר האיקס של הקצה הימני.

נביט באמצע הקטע $d_1=\frac{a_1+b_1}{2}$.

אם $\lim_{x\to d_1^-} f(x)<d_1$ אזי נגדיר את הקטע הבא להיות

$$[a_2,b_2]=[a_1,d_1]$$

אם $\lim_{x\to d_1^+} f(x)>d\_1$ אזי נגדיר את הקטע הבא להיות

$$[a_2,b_2]=[d_1,b_1]$$

אחרת, $\lim_{x\to d_1^-} f(x)\geq d_1$ וכן $\lim_{x\to d_1^+} f(x)\leq d\_1$ וכיוון שהפונקציה מונוטונית עולה נובע כי

$$\lim_{x\to d_1^-} f(x)=\lim_{x\to d_1^+} f(x)=d_1$$

וכיוון שבהכרח

$$\lim_{x\to d_1^-} f(x)\leq f(d_1)\leq \lim_{x\to d_1^+} f(x)$$

נובע כי $f(d_1)=d_1$ והפונקציה רציפה בנקודה זו, ונבחר $c=d_1$ וסיימנו.

כך אם לא נסיים אחר מספר סופי של צעדים, נבנה סדרת קטעים אינסופית. (בדומה להוכחת משפט ערך הביניים) הצדדים השמאליים של הקטעים מהווים סדרה מונוטונית עולה, הצדדים הימניים של הקטעים מהווים סדרה מונוטונית יורדת, שתי הסדרות חסומות ב$[a,b]$, ואורך הקטעים שואף לאפס.

לכן קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש $a_n, b_n \to c$

לכל n מתקיים כי

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \geq \lim_{x \to a_n^+} f(x) > a_n$$

וכיוון ש $a_n \to c$ נובע כי $\lim_{x \to c^-} f(x) \geq c$

באופן דומה לכל n מתקיים כי

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \leq \lim_{x \to b_n^-} f(x) < b_n$$

וכיוון ש $b_n \to c$ נובע כי $\lim_{x \to c^+} f(x) \leq c$

סה"כ כיוון שהפונקציה עולה נקבל כי

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = c$$

ולכן

$$f(c) = c$$

והפונקציה רציפה בנקודה זו.

12. תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(x) > m$, הופריכו: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(x) > m + \varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: לפי משפט ויירשטראס II הפונקציה f מקבלת מינימום כיוון שהיא רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, בנקודה $c \in [a,b]$.

כלומר לכל $x \in [a,b]$ מתקיים כי $f(c) \leq f(x)$.

כעת, לפי הנתון

$$m < f(c)$$

ניקח את חצי המרחק

$$\varepsilon = \frac{f(c) - m}{2}$$

ולכן

$$m + \varepsilon = m + \frac{f(c) - m}{2} = \frac{f(c) + m}{2}$$

הוא בדיוק אמצע הקטע בין $m < m + \varepsilon < f(c)$

ולכן אכן לכל $x \in [a, b]$ מתקיים כי

$$m + \varepsilon < f(x)$$

13. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שאין לה קיצון מקומי, הופריכו: f מונוטונית (עולה או יורדת).

הוכחה: נב"ש כי הפונקציה אינה עולה ואינה יורדת, לכן קיימים שני זוגות של נקודות

$$x_1 < x_2, \quad x_3 < x_4$$

כך ש

$$f(x_1) < f(x_2), \quad f(x_3) > f(x_4)$$

נביט בקטע $[a, b]$ כך ש $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (a, b)$.

לפי משפט ויירשטראס II הפונקציה מקבלת מינימום ומקסימום בקטע $[a, b]$ וכיוון שאין קיצון מקומי המקסימום והמינימום מתקבלים רק בקצוות.

אם $f(a) = f(b)$ הפונקציה קבועה בקטע (כי המקסימום שווה למינימום) ולכן כל הנקודות בקטע הפתוח הן קיצון מקומי בסתירה. לכן $f(a) > f(b)$ או $f(b) > f(a)$.

נניח כי $f(a) > f(b)$ (ההוכחה עבור המקרה השני דומה).

נביט בקטע $[a, x_2]$. שוב לפי ווירשטראס הפונקציה מקבלת מקסימום ומינימום בקטע.

כיוון ש $f(x_1) < f(x_2)$ המינימום לא מתקבל בקצה הימני.

כמו כן, כיוון ש$f(a)$ היא המקסימום ב$[a, b]$ נובע כי $f(a) > f(x_1)$.

לכן המינימום בקטע $[a, x_2]$ לא מתקבל בקצוות, אלא בפנים הקטע (בנקודה בה הערך קטן או שווה ל$f(x_1)$), ולכן יש מינימום מקומי, בסתירה.

14. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהיא מונוטונית (עולה או יורדת), הופריכו: אין לf מקסימום.

הפרכה: פונקציה קבועה הינה מונוטונית ומקבלת את המקסימום (והמינימום) בכל נקודה.

15. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה וחסומה, הופריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים וסופי.

הוכחה: ההוכחה דומה לסדרות מונוטוניות וחסומות.

נסמן את החסם העליון של הפונקציה בM.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K\in\mathbb{R}$ כך ש $M-\varepsilon < f(K) \le M$ וכיוון שהפונקציה עולה לכל $x > K$ מתקיים כי

$$M-\varepsilon < f(K) \le f(x) \le M < M+\varepsilon$$

והוכחנו כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = M$$

אפשר להוכיח באופן דומה כי אם הפונקציה אינה חסומה מלעיל היא שואפת לאינסוף באינסוף.

16. יהי $K\in\mathbb{R}$ ותהי f המקיימת לכל $x_1,x_2\in[a,b]$ כי $|f(x_1)-f(x_2)| \le K|x_1-x_2|$, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.

הוכחה:

תהי $x_n\in[a,b]$ כך ש $x_n\to x_0$ צ"ל כי $f(x_n)\to f(x_0)$

זה שקול לכך ש $f(x_n)-f(x_0)\to 0$ אכן

$$|f(x_n)-f(x_0)| \le K|x_n-x_0| \to 0$$

ולפי חצי סנדוויץ' על הרצפה סיימנו.

17. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, ותהיינה סדרות a_n,b_n כך ש $a_n-b_n\to 0$, הופריכו: $f(a_n)-f(b_n)\to 0$.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x)=x^2$ שהינה רציפה בכל הממשיים, ונביט בזוג הסדרות

$$a_n = n+\frac{1}{n}$$

$$b_n = n$$

כעת

$$a_n - b_n = \frac{1}{n} \to 0$$

אך

$$f(a_n) - f(b_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 - \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$$

18. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, הוכיחו כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה $f\big(f(x)\big) = x$.

<u>הוכחה</u>:

בכיוון ראשון, נניח כי קיימת נקודה c עבורה $f(c) = c$

לכן

$$f\big(f(c)\big) = f(c) = c$$

ואותה נקודה הינה פתרון למשוואה השנייה.

בכיוון השני, נניח כי קיימת נקודה c עבורה $f\big(f(c)\big) = c$

כעת עלינו להוכיח כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$. נעביר אגב ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - x$$

עלינו להוכיח שלh יש חיתוך עם ציר האיקס.

h רציפה כצירוף של רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחת לציר.

נציב בפונקציה את $c, f(c)$

$$h(c) = f(c) - c$$

$$h\big(f(c)\big) = f\big(f(c)\big) - f(c) = c - f(c) = -h(c)$$

כיוון שמצאנו שני ערכים של הפונקציה $h(c), h\big(f(c)\big)$ עם סימנים מנוגדים, סיימנו.

19. הופריכו: לכל פולינום מדרגה אי זוגית יש שורש ממשי.

<u>הוכחה</u>: יהי פולינום

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_0$$

כך ש $a_{2n+1} > 0$ (ההוכחה עבור מקדם שלילי דומה).

מה עושים בחדו"א שלא יודעים להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right) = \{\infty \cdot a_{2n+1}\} = \infty$$

באופן דומה

$$\lim_{x\to(-\infty)} p(x) = \lim_{x\to(-\infty)} x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right) = \{-\infty \cdot a_{2n+1}\} = -\infty$$

לכן קיימות נקודות כך ש

$$p(x_1) > 0 \qquad p(x_2) < 0$$

וכיוון שפולינום הוא פונקציה רציפה לפי משפט ערך הביניים הוא חייב לחתוך את הציר.

20. תהיינה $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי $f(x) = g(x)$, הופריכו: $f = g$.

<u>הוכחה</u>:

תהי נקודה $x \in \mathbb{R}$ נבחר סדרה $x_n \to x$ כך שלכל n מתקיים כי $x_n \in \mathbb{Q}$

כיוון שהפונקציות רציפות מתקיים

$$f(x_n) \to f(x), \quad f(x_n) \to g(x)$$

אך לפי הנתון $f(x_n) = g(x_n)$ ולכן $f(x) = g(x)$.

21. תהי $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה לכל $x \neq 1$ כך שלכל $p, q \in \mathbb{Z}$ כך ש $q \neq 0, q \neq p$ מתקיים כי $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q}{q-p}$.

הופריכו: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ לכל $1 \neq x \in \mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>:

תהי $1 \neq x \in \mathbb{Q}$. קיימים $p, q \in \mathbb{Z}$ כך ש $q \neq 0, q \neq p$ וכן $x = \frac{p}{q}$. לכן

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{p}{q}}=\frac{q}{q-p}=f\left(\frac{p}{q}\right)$$

כיוון שהפונקציות $f(x)$, $\frac{1}{1-x}$ רציפות לכל $x\neq 1$ ושוות על הרציונאליים ששונים מ1 הן שוות לכל $x\neq 1$ (בדומה לתרגיל קודם).

22. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בכל $x\in\mathbb{Q}$ הופריכו: קיימת $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך ש$g(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{Q}$.

הפרכה:

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{2}}$ רציפה בכל הרציונאליים. תהי g השווה לf בכל הרציונאליים.

תהי $\sqrt{2}<x_n\to\sqrt{2}$ כך שלכל n מתקיים כי $x_n\in\mathbb{Q}$ אזי

$$g(x_n)=f(x_n)=\frac{1}{x_n-\sqrt{2}}=\left\{\frac{1}{0^+}\right\}=\infty$$

לכן לפונקציה g אין גבול סופי בנקודה $\sqrt{2}$ ולכן אינה רציפה שם.

23. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים ויהי $0<T\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x+T)=f(x)$.

הופריכו: קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{T}{2}\right)$.

<u>הוכחה</u>: נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{T}{2}\right)$$

עלינו להוכיח שהפונקציה h חותכת את ציר האיקס.

הפונקציה h רציפה כצירוף רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחתיו.

נציב את הנקודות $0,\frac{T}{2}$ ונזכור שלפי הנתון

$$f(T)=f(0+T)=f(0)$$

$$h(0)=f(0)-f\left(\frac{T}{2}\right)$$

$$h\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(T)=f\left(\frac{T}{2}\right)-f(0)=-h(0)$$

מצאנו שתי נקודות עליהן הפונקציה מקבלת סימנים מנוגדים ולכן סיימנו.

24. תהי f רציפה ב$[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$, הופריכו: לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

<u>הוכחה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}$ נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$$

צריך להוכיח שקיימת נקודה c עבורה $h(c)=0$.

הפונקציה h רציפה בתחום $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ כצירוף של רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים מספיק למצוא בתחום זה נקודה מעל הציר ונקודה מתחתיו על מנת לסיים את ההוכחה.

נציב בh את הנקודות $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$

$$h(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$h\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$h\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)$$

כעת נסכום את כל הערכים שמצאנו:

$$h(0)+h\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+h\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)$$

מרבית האיברים מצטמצמים ואנחנו נותרים עם $f(0)-f(1)$, אך לפי הנתון $f(0)=f(1)$ ולכן סה"כ מצאנו כי

$$h(0)+h\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+h\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$$

כעת חייבים להיות שני איברים בעלי סימנים מנוגדים, או שכולם מתאפסים.

כך או כך הוכחנו שהפונקציה h מתאפסת, כפי שרצינו.

25. תהי f מונוטונית עולה המוגדרת בכל הממשיים, הופריכו: כל נקודת אי רציפות שלה היא ממין ראשון (קפיצתית).

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח כי לא תתכן נקודת אי רציפות סליקה.

תהי x_0 כך ש $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ קיים וסופי, נוכיח כי $L = f(x_0)$ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה זו (ולכן לא תתכן נקודת אי רציפות סליקה).

כיוון שהפונקציה עולה, לכל $x < x_0$ מתקיים כי $f(x) \le f(x_0)$ ולכן

$$L = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$$

באופן דומה

$$L = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$$

וסה"כ קיבלנו כי $L \le f(x_0)$ וכן $L \ge f(x_0)$ ולכן $L = f(x_0)$ כפי שרצינו.

תהי x_0 כלשהי אזי כיוון שהפונקציה מונוטונית עולה.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in(-\infty,x_0)} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in(x_0,\infty)} f(x)$$

שימו לב שבקטע $(-\infty, x_0)$ הפונקציה חסומה מלעיל ע"י $f(x_0)$ ובקטע $(-\infty, x_0)$ הפונקציה חסומה מלרע ע"י $f(x_0)$.

(הוכחה דומה לכך בתרגיל קודם, ובהוכחה שסדרות מונוטוניות וחסומות מתכנסות)

כיוון ששני הגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים, אם הם שווים מדובר בנקודת רציפות, ואם הם שונים מדובר בנקודת אי רציפות ממין ראשון (קפיצתית).

26. תהי $f: [a,b] \to [a,b]$ מונוטונית ועל, הופריכו: f רציפה ב$[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: תהי $x_0 \in (a,b)$. בדומה לתרגיל קודם, כיוון שהפונקציה מונוטונית מתקיים כי הגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים.

אם הם שווים, אזי כמו בתרגיל קודם, הפונקציה רציפה בx_0.

אחרת, אם

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

נובע שאחד הצדדים לפחות אינו שווה, נטפל באחד המקרים והשני דומה.

נניח $f(x_0) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ נבחר נקודה $y \in [a,b]$ כך ש $f(x_0) < y < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (למשל אמצע הקטע) ונוכיח שלא יכול להיות לה מקור.

כיוון שהפונקציה עולה, לכל $x \leq x_0$ מתקיים כי $f(x) \leq f(x_0) < y$.

כעת, נתון שהפונקציה **על** ולכן קיים מקור x_1 כך ש $f(x_1) = y$, ולפי מה שראינו הרגע $x_0 < x_1$

ולכן בקטע $[x_0, x_1]$ המקסימום הוא $y = f(x_1)$ כיוון שהפונקציה עולה.

ולכן $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \leq y$ בסתירה.

באופן דומה אם $\lim_{x\to a^+} f(x) > f(a)$ או $\lim_{x\to b^-} f(x) < f(b)$ אנחנו מקבלים סתירה לכך שהפונקציה על, ולכן סה"כ הפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

27. הופריכו: קיימת $f:[a,b] \to [c,d]$ רציפה, כך שלכל $y \in [c,d]$ קיימים <u>בדיוק שני מקורות</u> $x_1 \neq x_2 \in [a,b]$ כך ש $f(x_1) = f(x_2) = y$.

הפרכה: נב"ש כי קיימת פונקציה כזו.

נסמן את המקורות של c ב $a_1 < a_2$ ואת המקורות של d ב $b_1 < b_2$.

נחלק למקרים שונים של הסדר בין ארבעת הנקודות ונראה שכולם מובילים לסתירה.

מקרה ראשון $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$

ניקח נקודה כלשהי x בקטע הפתוח (a_1, a_2), כיוון שלכל איבר יש בדיוק שני מקורות ולא יותר

וכיוון ש$f(x) \in [c,d]$ נובע כי $c < f(x) < d$.

יהי גובה m כך ש $c < m < f(x)$.

לפי משפט ערך הביניים, כיוון שהפונקציה רציפה, חייבים להיות לm מקורות בשלושת הקטעים $(a_1, x), (x, a_2), (a_2, b_1)$ בסתירה.

מקרה שני $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$

עבור $m = \frac{c+d}{2}$ חייבים להיות מקורות בשלושת הקטעים $(a_1, b_1), (b_1, a_2), (a_2, b_2)$ בסתירה.

מקרה שלישי $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$

תהי נקודה $x \in (b_1, b_2)$ אזי ל$f(x)$ יש עוד שני מקורות נוספים בקטעים $(a_1, b_1), (b_2, a_2)$ בסתירה.

מקרה רביעי $b_1 < a_1 < b_2 < a_2$ דומה לשני, והמקרה החמישי ואחרון $b_1 < b_2 < a_1 < a_2$ דומה לראשון.

28. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \in \mathbb{Q}$. הופריכו: f פונקציה קבועה.

<u>הוכחה</u>: נב"ש כי הפונקציה אינה קבועה, לכן קיימות שתי נקודות כך ש$f(x_1) \neq f(x_2)$

בין $f(x_1), f(x_2)$ קיים מספר אי רציונלי, ולפי משפט ערך הביניים חייב להיות לו מקור כי הפונקציה רציפה, בסתירה לכך ש$f(x) \in \mathbb{Q}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

29. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש $f(f(x))$ רציפה בכל הממשיים. הופריכו: f רציפה בכל הממשים.

הפרכה:

נביט בפונקצית דיריכלה שאינה רציפה באף נקודה

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

כיוון ש $D(0) = D(1) = 1$ מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$ כי

$$D\big(D(x)\big) = 1$$

כלומר $D\big(D(x)\big)$ היא הפונקציה הקבועה שהינה רציפה בכל הממשיים.

30. תהי $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. הופריכו: f מונוטונית (עולה או יורדת).

<u>הוכחה</u>: כיוון שהפונקציה חח"ע $f(a) \neq f(b)$, נניח כי $f(b) > f(a)$ ונוכיח כי הפונקציה עולה בקטע (אם $f(a) > f(b)$ ניתן להוכיח באופן דומה כי הפונקציה מונוטונית יורדת).

נב"ש שהפונקציה אינה עולה, לכן קיימות $x_1 < x_2 \in [a, b]$ כך ש $f(x_1) > f(x_2)$.

אם $f(a)<f(x_1)$ נבחר גובה m כך ש $f(a),f(x_2)<m<f(x_1)$ ולפי משפט ערך הביניים כיוון שהפונקציה רציפה קיימים מקורות לm בקטעים $(a,x_1),(x_1,x_2)$ בסתירה לחח"ע.

אחרת, $f(a)>f(x_1)$ ולכן $f(b)>f(a)>f(x_1)$.

נבחר גובה m כך ש $f(x_2)<m<f(x_1),f(b)$ ושוב נקבל שני מקורות שונים לm בקטעים $(x_1,x_2),(x_2,b)$ בסתירה לחח"ע.

31. תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ רציפה המקיימת לכל $x\in[-1,1]$ כי $x^2+f^2(x)=1$ וכי $f(0)=1$.

הופריכו: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ לכל $x\in[-1,1]$.

<u>הוכחה:</u>

כיוון ש $f^2(x)=1-x^2$ נובע כי לכל $x\in[-1,1]$ מתקיים כי $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ או $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$

נשים לב כי כך או כך $f(1)=f(-1)=0$.

נב"ש כי קיים $x\in(-1,1)$ כך ש $f(x)\neq\sqrt{1-x^2}$ ולכן $f(x)=-\sqrt{1-x^2}<0$.

כיוון ש $f(x)<0$ ונתון $f(0)>0$ וכן הפונקציה רציפה, לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה c בין x ל0 עבורה $f(c)=0$.

כיוון ש$x\in(-1,1)$ נובע כי $c\in(-1,1)$.

נציב בנתון $c^2+f^2(c)=1$ ולכן $c^2=1$ בסתירה.

32. תהי $f:A\to\mathbb{R}$ כך שלכל שתי סדרות המקיימות $a_n-b_n\to 0$ מתקיים $f(a_n)-f(b_n)$.

הופריכו: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים כי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

<u>הוכחה:</u>

נב"ש כי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים זוג נקודות $|x_1-x_2|<\delta$ כך ש $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon$.

לכן, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים זוג נקודות $|a_n-b_n|<\frac{1}{n}$ כך ש$|f(a_n)-f(b_n)|\geq\varepsilon$.

לכן לפי חצי סנדוויץ' על הרצפה $|a_n-b_n|\to 0$ אך $|f(a_n)-f(b_n)|\nrightarrow 0$ בסתירה לנתון.

33. תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל שתי סדרות $a_n-b_n\to 0$ כי $f(a_n)-f(b_n)\to 0$, הופריכו: $\frac{f(x)}{x}$ חסומה.

<u>הוכחה:</u> לפי תרגיל קודם, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים כי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

לכן בפרט עבור $\varepsilon=1$ (יכלנו לבחור כל גודל חיובי כאן), קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<1$.

כיוון ש $\frac{\delta}{2}<\delta$ נובע כי אם $|x_1-x_2|\leq\frac{\delta}{2}$ אזי $|f(x_1)-f(x_2)|<1$.

יהי $x \in [1,\infty)$, ונביט בסדרת הנקודות:

$$1, 1+\frac{\delta}{2}, 1+2\cdot\frac{\delta}{2}, \dots, 1+k\cdot\frac{\delta}{2}$$

כך ש

$$1+(k-1)\cdot\frac{\delta}{2} < x \le 1+k\cdot\frac{\delta}{2}$$

(כלומר המשכנו את סדרת הנקודות עד שהגענו לx, זה אפשרי כיוון ש $1+n\cdot\frac{\delta}{2} \to \infty$).

כעת, לפי אי השיוויון השמאלי

$$(k-1)\cdot\frac{\delta}{2} < 1+(k-1)\cdot\frac{\delta}{2} < x$$

לכן

$$k-1 < \frac{2x}{\delta}$$

ולכן

$$k < 1+\frac{2x}{\delta}$$

כעת,

$$|f(x)-f(1)| =$$

$$= \left|f(x) - f\left(1+(k-1)\cdot\frac{\delta}{2}\right) + f\left(1+(k-1)\cdot\frac{\delta}{2}\right) - \cdots + f\left(1+2\cdot\frac{\delta}{2}\right) - f\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + f\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - f(1)\right| \le$$

$$\le \left|f(x) - f\left(1+(k-1)\cdot\frac{\delta}{2}\right)\right| + \cdots + \left|f\left(1+2\cdot\frac{\delta}{2}\right) - f\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\right| + \left|f\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - f(1)\right|$$

כיוון שההפרש בין כל שתי נקודות בציר האיקס שווה $\frac{\delta}{2}$ (פרט לזוג הראשון בו ההפרש קטן מ$\frac{\delta}{2}$), נובע כי ההפרש בציר הע y קטן מ1.

ומכיוון שישנם k זוגות, סה"כ אנו מקבלים כי

$$|f(x)-f(1)| < k < 1+\frac{2x}{\delta}$$

לכן

$$f(1)-\left(1+\frac{2x}{\delta}\right)<f(x)<f(1)+1+\frac{2x}{\delta}$$

נחלק את כל צידי אי השיוויון בקבוע x החיובי ונקבל כי

$$\frac{f(1)-1}{x}-\frac{2}{\delta}<\frac{f(x)}{x}<\frac{f(1)+1}{x}+\frac{2}{\delta}$$

לבסוף נותר להוכיח שהביטויים $\frac{f(1)\pm 1}{x}$ חסומים בתחום $[1,\infty)$ ללא תלות בx, זה נובע למשל מכך ש $\lim_{x\to\infty}\frac{f(1)\pm 1}{x}=0$, אך

אפשר להוכיח את זה ישירות בקלות על ידי חלוקה למקרים בהם הביטוי במונה שלילי או חיובי.

סה"כ הוכחנו שיש קבועים m,M שלא תלויים בנקודה x כך ש $m<\frac{f(x)}{x}<M$ לכל $x\in[1,\infty)$ כפי שרצינו.

34. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים כך ש$f(1)=1$, הופריכו: קיימת $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=-\ln(c)$.

<u>הוכחה</u>: נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x)=f(x)+\ln(x)$ הרציפה ב$(0,\infty)$.

לפי משפט ערך הביניים, מספיק למצוא נקודה מעל הציר ונקודה מתחתיו.

$$h(1)=f(1)+\ln(1)=1+0=1>0$$

כעת, מה עושים בחדו"א שאי אפשר להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=\{f(0)-\infty\}=-\infty$$

לכן קיימת נקודה $d>0$ בה $h(d)<0$.

הפונקציה h רציפה בקטע הסגור שבין $d,1$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת בקטע נקודה c עבורה $h(c)=0$.

35. תהי f רציפה בקטע $(a,b]$, הופריכו: f חסומה מלעיל או שהיא חסומה מלרע.

הפרכה: נביט בפונקציה

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

הרציפה בקטע $(0,1]$.

נביט בסדרות הבאות הנמצאות בקטע

$$0<a_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\to 0,\qquad 0<\ b_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}\to 0$$

נציב את הסדרות בפונקציה ונקבל

$$f(a_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \to \infty$$

$$f(b_n) = -\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \to -\infty$$

ולכן הפונקציה אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע בקטע.

36. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחיובית בכל הממשיים כך ש $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, קיימת נקודה c עבורה $f(c) = c$.

<u>הוכחה</u>: נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x) = f(x) - x$ הרציפה בכל הממשיים כצירוף רציפות, נמצא נקודה מעל הציר ומתחת לציר וכך לפי ערך הביניים נוכיח כי h חותכת את הציר כפי שרצינו.

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$$

כעת, מה עושים בחדו"א כשאי אפשר להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = \{\infty \cdot (0-1)\} = -\infty$$

לכן קיימת נקודה $d > 0$ בה $h(d) < 0$.

ולכן לפי ערך הביניים הפונקציה חותכת את הציר בקטע בין $0, d$, כפי שרצינו.

37. מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ בקטע $[1, \infty)$, או שהוכיחו שאינם קיימים.

פתרון –

ראשית, זה מפתה לגזור את הפונקציה על מנת לחשב את תחומי העלייה והירידה, אך במקרה הזה הנגזרת תוביל אותנו לביטוי מורכב במיוחד.

לכן, במקום 'לגזור כמו חמור', נפשט את הביטוי המקורי קודם כל.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2}$$

הפלא ופלא! קיבלנו אחד חלקי ביטוי חיובי מונוטונית עולה בקטע, ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת בתחום.

מכאן, הפונקציה מקבלת את המקסימום שלה בקצה השמאלי של הקטע $[1,\infty)$ כלומר המקסימום הוא

$$f(1)=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$$

כעת מה לגבי מינימום? לא ניתן להציב את הקצה הימני, אז מה עושים בחדו"א כשאי אפשר להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}=\left\{\frac{1}{\infty}\right\}=0$$

לכן אם יש מינימום הוא חייב להיות אפס. הרי הפונקציה תהא נמוכה מכל גודל שגדול מאפס, ואם מתישהו הייתה מקבלת ערך שקטן מאפס, כיוון שהיא יורדת הגבול היה צריך להיות קטן מאפס.

וכמובן שהפונקציה לא יכולה להתאפס כיוון שהמונה הוא 1, ולכן אין מינימום.

38. תהי f כך ש $f'(x)>1$ לכל $x\in\mathbb{R}$, יהי $a_1\in\mathbb{R}$ ונגדיר סדרה ע"י $a_{n+1}=f(a_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$. הופריכו: $|a_n|\to\infty$.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x)=2x$ שנגזרתה היא $f'(x)=2>1$.

נציב את האיבר הראשון $a_1=0$ ונקבל את הסדרה הקבועה $a_n\to 0$.

39. תהי $f(x)$ המקיימת $f'(0)=1$, יהי $m>1$ וכן לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f''(x)\le 0$. חשבו את $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$.

פתרון –

כיוון ש $f''\le 0$ הנגזרת הראשונה מונוטונית יורדת.

לכן לכל $x\ge 0$ מתקיים כי $f'(x)\le 1$

נעביר אגף $f'(x)-1\le 0$, ונביט בפונקציה הקדומה

$$h(x)=f(x)-x$$

כלומר ראינו כי $h'(x)\le 0$ לכל $x\ge 0$ ולכן הפונקציה יורדת בתחום ולכל $x\ge 0$ מתקיים כי $h(x)\le h(0)$.

במילים אחרות, לכל $x\ge 0$

$$f(x)-x\le f(0)-0$$

$$f(x)\le x+f(0)$$

נחזור לשאלה,

$$f(x) - mx \leq x + f(0) - mx = (1-m)x + f(0) \to -\infty$$

הגבול הוא מינוס אינסוף כיוון ש $1 - m < 0$

ולכן לפי חצי סנדוויץ'

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = -\infty$$

40. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x) < x$ וכן $f(0) = 0$.

הופריכו: לכל $x > 0$ מתקיים כי $f(x) < \frac{x^2}{2}$.

<u>הוכחה</u>: נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

שאנו צריכים להוכיח שהיא שלילית לכל $x > 0$.

כיוון ש $h(0) = f(0) - 0 = 0$, מספיק להוכיח כי הפונקציה מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 0$

אכן, אף לכל הממשיים,

$$h'(x) = f'(x) - x < 0$$

כפי שרצינו.

41. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x) < x$ וכן $f(0) = 0$.

חשבו את $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$.

פתרון –

נעביר אגף $f'(x) - x < 0$ ונביט בפונקציה הקדומה

$$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $h'(x) = f'(x) - x < 0$ ולכן הפונקציה h יורדת בכל הממשיים.

כעת, נציב $x = 0$ ונקבל כי $h(0) = f(0) - 0 = 0$

לכן לכל $x < 0$ כיוון שh יורדת מתקיים כי $h(x) > h(0) = 0$

לכן לכל $x < 0$ מתקיים כי

$$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} > 0$$

ולכן $f(x) > \frac{x^2}{2}$

לפי חצי סנדוויץ' נקבל כי

$$\lim_{x \to (-\infty)} f(x) = \infty$$

42. תהי f עבורה $f(x)f'(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, הופריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq 0$.

הפרכה: כל פונקציה שלילית ויורדת תהווה דוגמא נגדית, למשל $f(x) = -e^x$

אכן $f(x) < 0$ אך $f(x)f'(x) = (-e^x)^2 \geq 0$.

43. תהי f עבורה $f(x)f'(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, וכן $f(0) = 0$ הופריכו: לכל $x < 0$ מתקיים כי $f(x) = 0$.

הוכחה: נשים לב כי

$$\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2f(x)f'(x) \geq 0$$

לכן הפונקציה $f^2(x)$ מונוטונית עולה בכל הממשיים.

כיוון שנתון כי $f(0) = 0$ נובע כי $f^2(0) = 0$.

ביחד, לכל $x < 0$

$$0 \leq f^2(x) \leq f^2(0) = 0$$

(כיוון ש $f^2(x)$ עולה וכמובן אי שלילית.)

כלומר $f^2(x) = 0$ ולכן $f(x) = 0$, כפי שרצינו.

44. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך ש$f\big(f(x)\big) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הופריכו: קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ כך ש

$\big(f'(c)\big)^2 - f'(c) = 0$.

הוכחה: נגזור את שני צידי השיוויון $f\big(f(x)\big) = f(x)$ ונקבל כי

$$f'\big(f(x)\big)f'(x) = f'(x)$$

נעביר אגף ונוציא גורם משותף

$$f'(x)\Big(f'\big(f(x)\big) - 1\Big) = 0$$

יהי $x \in \mathbb{R}$. אם $f'(x) = 0$ נבחר $c = x$ וסיימנו.

אחרת, $f'\big(f(x)\big) = 1$, נבחר $c = f(x)$ וסיימנו.

(הרי הן $f'(c) = 0$ והן $f'(c) = 1$ מאפסות את $\big(f'(c)\big)^2 - f'(c)$.)

45. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך ש$f\big(f(x)\big) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הופריכו: f הינה פונקציה קבועה או שהינה פונקצית הזהות.

הוכחה: נניח שf אינה פונקציה קבועה, ונוכיח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) = x$.

ראשית, לכל איבר בתמונה $x \in Im(f)$ מתקיים כי $x = f(t)$ ולכן

$$f(x) = f\big(f(t)\big) = f(t) = x$$

כלומר הפונקציה חייבת לשלוח כל איבר בתמונה לעצמו, ואנחנו רוצים להוכיח כי $Im(f) = \mathbb{R}$ ולכן מדובר בפונקצית הזהות, הרי לכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים $x \in Im(f)$ ולכן $f(x) = x$.

כיוון שהפונקציה גזירה היא רציפה, ולכן לכל שתי נקודות $a, b \in Im(f)$ מתקיים כי $[a, b] \subseteq Im(f)$ לפי משפט ערך הביניים.

מכאן נובע דיי בקלות כי אם $Im(f)$ אינה חסומה מלעיל ומלרע אזי בהכרח $Im(f) = \mathbb{R}$, הרי לכל נקודה יש איבר גדול ממנו בתמונה (כי אינה חסומה מלעיל) ואיבר קטן ממנה בתמונה (כי אינה חסומה מלרע) ולכן כל הקטע בינהן מוכל בתמונה וכך גם הנקודה שלנו.

נב"ש כי התמונה חסומה מלרע (הוכחה עבור חסם מלעיל דומה), ונסמן את החסם התחתון שלה ב

$$m = \inf\big(f(x)\big)$$

נוכיח ראשית כי $f(m) = m$.

אחרת, $m \notin Im(f)$, ולכן ניתן לקחת סדרת נקודות $m \neq a_n \in Im(f)$ כך ש $a_n \to m$.

כיוון שהפונקציה רציפה,

$$f(a_n) \to f(m)$$

אך כיוון ש$a_n \in Im(f)$ מתקיים כי $f(a_n) = a_n$ וביחד עם העובדה ש $a_n \to m$

נובע כי $f(m) = m$ בסתירה.

כיוון שהנחנו שהפונקציה אינה קבועה, קיים ערך נוסף בתמונה $m < b \in Im(f)$.

לכל $x \in [m,b]$ מתקיים כי $f(x) = x$ וביחד עם הנתון שהפונקציה גזירה אנו מקבלים כי

$$f'(m) = \lim_{x\to m} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} = \lim_{x\to m^+} \frac{x - m}{x - m} = 1$$

אבל, כיוון שm הוא המינימום של התמונה, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq m$, ולכן:

$$f'(m) = \lim_{x\to m} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} = \lim_{x\to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} = \lim_{x\to m^-} \frac{f(x) - m}{x - m} \leq 0$$

(אי השיוויון האחרון הוא כיוון שהמונה אי שלילי והמכנה שלילי.)

וקיבלנו כי $1 = f'(m) \leq 0$, בסתירה.

46. תהי f המקיימת $f(x) > 0$ וכן $f''(x) < 0$ לכל $0 < x \in \mathbb{R}$. הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

הפרכה: עלינו למצוא פונקציה חיובית ובוכה בעלת אסימפטוטה אופקית $x = 1$ מימין.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$

קל לוודא שהיא מקיימת את כל הדרוש.

47. הופריכו: קיימת פונקציה f המקיימת $f(x) > 0$ וכן $f''(x) < 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הפרכה: נב"ש כי קיימת פונקציה כזו. כיוון שהנגזרת השנייה שלילית, הנגזרת הראשונה יורדת.

ראשית, נניח כי קיימת נקודה a בה $f'(a) < 0$.

כיוון שהפונקציה יורדת מתקיים כי לכל $x \geq a$ מתקיים כי $f'(x) \leq f'(a)$.

נעביר אגף ונביט בפונקציה הקדומה

$$h(x) = f(x) - f'(a)x$$

מהנתונים נובע כי

$$h'(x) = f'(x) - f'(a) \leq 0$$

ולכן $h(x)$ יורדת ולכל $x \geq a$ מתקיים כי

$$h(x) \leq h(a)$$

כלומר

$$f(x) - f'(a)x \leq f(a) - f'(a)a$$

ולכן לכל $x \geq a$

$$f(x) \leq f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

כיוון ש $f'(a) < 0$ הצד הימני שואף למינוס אינסוף כאשר $x \to \infty$ ולכן לפי חצי סנדוויץ' גם $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ בסתירה לכך שהפונקציה חיובית בכל הממשיים.

כעת, נניח כי קיימת נקודה a עבורה $f'(a) > 0$.

כיוון שf' יורדת, נובע כי לכל $x \leq a$ מתקיים $f'(x) \geq f'(a)$.

נעביר אגף ונביט בפונקציה הקדומה

$$h(x) = f(x) - f'(a)x$$

לכל $x \leq a$ מתקיים כי $h'(x) \geq 0$

לכן לכל $x \leq a$ מתקיים כי

$$h(x) \leq h(a)$$

כלומר

$$f(x) - f'(a)x \leq f(a) - f'(a)a$$

ומכאן לכל $x \leq a$ מתקיים

$$f(x) \leq f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

כיוון ש $f'(a) > 0$ נובע כי

$$\lim_{x\to-\infty} f'(a)x+f(a)-f'(a)a=-\infty$$

ולכן לפי חצי סנדוויץ' נובע כי $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ בסתירה לכך שהפונקציה חיובית בכל הממשיים.

לבסוף, נותרנו עם המצב לפיו הנגזרת קבועה אפס, ומכאן גם הנגזרת השנייה קבועה אפס בסתירה.

48. תהי f המקיימת $f(x)>0$ וכן $f''(x)<0$ לכל $0<x\in\mathbb{R}$. הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

<u>הוכחה</u>: מדובר בפונקציה חיובית ובוכה, נוכיח שלא ייתכן שהיא יורדת לכיוון אסימפטוטה אופקית $x=0$ מימין, אלא בתנאי השאלה נוכיח שהפונקציה חייבת לעלות (אחרת מתישהו היא תחתוך את ציר איקס).

נב"ש כי קיימת נקודה a בה $m=f'(a)<0$.

כיוון ש$f''<0$ נובע כי הנגזרת הראשונה יורדת ולכן לכל $x\geq a$ מתקיים כי $f'(x)\leq m$.

נעביר אגף $f'(x)-m\leq 0$ ונביט בפונקציה הקדומה

$$h(x)=f(x)-mx$$

כלומר h יורדת בתחום $[a,\infty)$ ולכן לכל $x\geq a$ מתקיים כי $h(x)\leq h(a)$

ובמילים אחרות לכל $x\geq a$

$$f(x)-mx\leq f(a)-ma$$

$$f(x)\leq mx+f(a)-ma$$

כיוון שמימין יש לנו ישר עם שיפוע שלילי, הוא שואף למינוס אינסוף:

$$\lim_{x\to\infty} mx+f(a)-ma=-\infty$$

ולכן לפי חצי סנדוויץ' גם

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

בסתירה לכך שמדובר בפונקציה חיובית.

לכן סה"כ הפונקציה עולה בתחום, ולכן הגבול שלה באינסוף גדול או שווה מכל ערך שהיא מקבלת.

כיוון ש$f(x)>0$ בכל נקודה, נציב נקודה כלשהי ונקבל שהגבול באינסוף חייב להיות גדול או שווה לערך בנקודה זו, ולכן בפרט הגבול לא יכול להיות אפס.

49. תהי f המקיימת $f''(x)<0$ לכל $x\in(0,1)$, הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$.

הוכחה: למעשה בשאלה זו נראה כי לא ייתכן שלפונקציה יש אסימפטוטה אנכית בתחום בו היא בוכה.

תהי $a\in(0,1)$ נקודה כלשהי בקטע.

כיוון ש $f''<0$ הנגזרת הראשונה יורדת, ולכן לכל $0<x<a$ מתקיים כי $f'(x)>f'(a)$.

נעביר אגף $f'(x)-f'(a)>0$ ונבנה את הפונקציה הקדומה

$$h(x)=f(x)-f'(a)x$$

כלומר ראינו כי $h'>0$ בקטע $(0,a)$ ולכן h עולה ולכן לכל $0<x<a$ מתקיים כי

$$h(x)<h(a)$$

כלומר

$$f(x)-f'(a)x<f(a)-f'(a)a$$

ולכן

$$f(x)<f'(a)x+f(a)-f'(a)a$$

הביטוי מימין הוא ישר וגבולו באפס הוא גובה החיתוך עם ציר הע:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(a)x+f(a)-f'(a)a=f(a)-f'(a)a$$

ולכן אם הגבול של הפונקציה קיים הוא מקיים:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\le f(a)-f'(a)a$$

ולכן הגבול אינו יכול להיות אינסוף.

50. תהי f המקיימת $f''(x)<0$ לכל $x\in(1,\infty)$, הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

הפרכה: פונקציה וודאי יכולה להיות בוכה ולשאוף לאינסוף. דוגמאות - $\sqrt{x},\ln(x)$.

51. תהי f המקיימת $f''(x)<0$ וכן $f'(x)<0$ לכל $x>0$. הופריכו: בהכרח לא מתקיים כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

הפרכה: פונקציה יכולה לבכות ולרדת למינוס אינסוף בקלות, למשל $-e^x$.

52. תהי f רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b), הופריכו: f' חסומה בקטע (a,b).

הפרכה: ויירשטראס מבטיח כי פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה בו, ולכן אנו מחפשים נגזרת שאינה רציפה בקטע הסגור.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

קל לוודא כי הפונקציה רציפה ב$[0,1]$ ואף גזירה בכל הממשיים (כאשר הנקודה עליה צריך לשים דגש היא כמובן אפס).

כמו כן, לא קשה לחשב כי

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

נביט בסדרה $0<a_n\to 0$ עליה $\cos\left(\frac{1}{a_n^2}\right)=1$. יוצא ש

$$\lim f'(a_n)=\lim 2a_n\sin\left(\frac{1}{a_n^2}\right)-\frac{2}{a_n}=0-\infty=-\infty$$

כאשר הביטוי השמאל בסכום הוא מהצורה של אפיסה כפול חסומה, והביטוי הימני מהצורה $\frac{2}{0^+}$.

בכך הוכחנו כי הנגזרת אינה חסומה, וכל שנותר הוא למצוא סדרה a_n כפי שהבטחנו.

כעת $\cos(x)=1$ אם ורק אם $x=2\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$.

לכן נבחר סדרה a_n כך ש

$$\frac{1}{a_n^2}=2\pi n$$

$$0<a_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\to 0$$

כפי שרצינו.

53. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך ש $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, הופריכו: קיימת נקודה c עבורה $f'(c)=0$.

<u>הוכחה</u>:

נביט בנקודה כלשהי, נניח $x=0$. כיוון שפונקציה שואפת לאינסוף מימין ומשמאל קיימות נקודות

$$x_2 > 0, \quad x_1 < 0$$

כך ש

$$f(x_1), f(x_2) > f(0)$$

נבחר גובה m כך ש

$$f(0) < m < f(x_1), f(x_2)$$

לפי משפט ערך הביניים קיימות נקודות $c_1 \in (x_1, 0), c_2 \in (0, x_2)$ כך ש $f(c_1) = f(c_2) = m$

כיוון שהפונקציה גזירה בכל הממשיים היא בוודא רציפה, ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c \in (c_1, c_2)$ בה $f'(c) = 0$.

54. תהי f כך ש $f''(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, הופריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

הפרכה: בעצם שואלים אותנו אם פונקציה מחייכת חייבת לשאוף לאינסוף. זה הגיוני, אם אנחנו טועים לחשוב שהיא חייבת להיות עולה.

הפונקציה e^{-x} יורדת לאפס ומחייכת.

55. תהי f בעלת נגזרת מונוטונית עולה כך ש $f'(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, הופריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

<u>הוכחה</u>: הפעם בעצם הפונקציה מחייכת (כי הנגזרת עולה) ועולה (כי הנגזרת חיובית) והגבול הוא אכן אינסוף כמו שציפינו בתרגיל קודם.

נציב נקודה כלשהי, למשל $x = 0$ ונסמן

$$m = f'(0) > 0$$

כיוון שהנגזרת עולה, לכל $x \geq 0$ מתקיים כי

$$f'(x) \geq f'(0) = m$$

נעביר אגף $f'(x) - m \geq 0$ ונבנה את הפונקציה הקדומה

$$h(x) = f(x) - mx$$

כיוון שנגזרתה של h אי שלילית, הפונקציה h עולה, לכל $x \geq 0$. ולכן לכל $x \geq 0$ מתקיים כי

$$h(x) \geq h(0)$$

כלומר

$$f(x) - mx \geq f(0) - m \cdot 0$$

ולכן

$$f(x) \geq mx + f(0)$$

כיוון ש $m > 0$ נובע כי $\lim_{x\to\infty} mx + f(0) = \infty$ ולכן לפי חצי סנדוויץ':

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

כפי שרצינו.

56. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בכל הממשיים, הופריכו: f' רציפה בכל הממשיים.

הפרכה: נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ברור שהיא גזירה לכל $x \neq 0$ נבדוק את הגזירות ב$x = 0$ לפי ההגדרה, כלומר נחשב את גבול שיפועי המיתרים.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} xsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

המעבר האחרון הוא כיוון שמדובר באפיסה כפול חסומה.

לכן הפונקציה אכן גזירה בכל הממשיים.

נחשב את הנגזרת

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

כעת $\lim_{x\to 0} 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ אך הגבול $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים ולכן סה"כ $\lim_{x\to 0} f'(x)$ אינו קיים, ובוודאי הנגזרת אינה רציפה ב$x = 0$.

57. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בכל הממשיים, הופריכו: f' חסומה בכל קטע סופי וסגור $[a, b]$.

הפרכה: נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ניתן להוכיח כי היא גזירה בכל הממשיים בדומה לתרגיל קודם, וכי מתקיים שהנגזרת הינה

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

כעת $\lim_{x\to 0} 2xsin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

וכמו כן, עבור הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$ מתקיים כי

$$\frac{2\cos\left(\frac{1}{a_n^2}\right)}{a_n} \to \infty$$

ולכן סה"כ $f'(x)$ אינה חסומה בקטע $[-1,1]$

(כל קטע שמכיל את אפס, בעצם.)

58. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בכל הממשיים כך ש $f'(0) > 0$, הופריכו: קיימת סביבה של $x = 0$ בה $f' > 0$.

הפרכה: נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נחשב את הנגזרת באפס:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} xsin\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 = 1$$

ולכן f גזירה בכל הממשיים וכן $f'(0) = 1 > 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

בדומה לתרגיל קודם, בעזרת סדרת הנקודות $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ ניתן להסיק כי בכל סביבה של אפס הנגזרת אינה חסומה מלרע,

ובוודאי לא ניתן להבטיח שהיא חיובית.

59. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש $f'(0) > 0$, וכן $f(0) = 0$ הופריכו: קיימת סביבה ימנית של $x = 0$ בה $f > 0$.

הוכחה: לפי הגדרת הנגזרת

$$0 < f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

לכן קיימת סביבה של אפס בה $\frac{f'(0)}{2} > \frac{f(x)}{x}$ ומכאן אם $x > 0$ בסביבה זו נובע כי $f(x) > 0$ כפי שרצינו.

60. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, הופריכו: קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ כך ש $f\big(f(c)\big) \neq -c$.

הוכחה:

נב"ש כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f\big(f(x)\big) = -x$.

תהי נקודה a כלשהי אזי נובע כי

$$f\big(f(a)\big) = -a$$

ולכן

$$f(-a) = f\Big(f\big(f(a)\big)\Big) = -f(a)$$

בפרט עבור $a = 0$ נקבל כי $f(0) = -f(0)$ ולכן $f(0) = 0$.

כמו כן, אם עבור נקודה כלשהי a מתקיים כי $f(a) = 0$ אזי

$$0 = f(0) = f\big(f(a)\big) = -a$$

כלומר סה"כ $f(x) = 0$ אם ורק אם $x = 0$.

כעת, ניקח נקודה חיובית כלשהי $a > 0$, ונסמן $f(a) = b$. נובע כי

$$f(b) = f\big(f(a)\big) = -a$$

אם $b > 0$, כיוון שהפונקציה רציפה, וכיוון ש $f(a) = b > 0, f(b) = -a < 0$ לפי משפט ערך הביניים הפונקציה חותכת את הציר בנקודה בין a, b. כיוון ש $0 < a, b$ נובע כי הפונקציה חותכת את הציר בנקודה גדולה מאפס בסתירה לכך שהיא חותכת את הציר באפס בלבד.

אם $b < 0$, נשים לב כי $f(-a) = -f(a) = -b$ ולפיכך $f(b) = -a < 0, f(-a) = -b > 0$. שוב מערך הביניים נסיק כי הפונקציה חותכת את ציר האיקס בנקודה בין $-a, b$ כלומר נקודה שלילית בסתירה.

לבסוף, לא ייתכן כי $b \neq 0$ הרי $a \neq 0$ וכן $f(a) = b$.

סה"כ קיבלנו סתירה, ולכן הוכחנו את הטענה.

חלק ב' - תרגילים הכוללים תתי סדרות וסדרות קושי:

61. תהי f רציפה וחסומה ב$(a,b]$, גזירה ב(a,b), כך שהגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$ אינו קיים, הופריכו: f' אינה חסומה ב(a,b).

<u>הוכחה</u>: כיוון שהגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$ לא קיים, ישנן שתי סדרות $a < a_n, b_n \to a$ כך ש

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

ניקח גבולות חלקיים שונים $K \neq M$

$$f\left(a_{k_n}\right) \to K$$

$$f\left(b_{m_n}\right) \to M$$

וכיוון שהפונקציה חסומה בקטע הגבולות הם סופיים $M, K \in \mathbb{R}$.

ברור שהחל משלב מסויים $a_{k_n} \neq b_{m_n}$ אחרת הגבולות היו שווים.

נביט בקטעים הסגורים שבין a_{k_n}, b_{m_n} בהם מתקיימים תנאי משפט לגראנז' כיוון שהפונקציה גזירה בכל $(a,b]$.

נפעיל את משפט לגראנז' על כל קטע ונקבל סדרת נקודות:

$$f'(c_n) = \frac{f\left(a_{k_n}\right) - f\left(b_{m_n}\right)}{a_{k_n} - b_{m_n}}$$

כעת

$$|f'(c_n)| = \left|\frac{f\left(a_{k_n}\right) - f\left(b_{m_n}\right)}{a_{k_n} - b_{m_n}}\right| = \left\{\frac{|K - M|}{0^+}\right\} \to \infty$$

ואכן הוכחנו שהנגזרת אינה חסומה.

62. תהי סדרה חסומה a_n המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}$, הופריכו: a_n מתכנסת לגבול סופי.

<u>הוכחה</u>: כיוון שהסדרה חסומה יש לה גבול עליון וגבול תחתון סופיים. נב"ש שהם שונים.

יהיו $m > n$ אזי

$$a_m - a_n = a_m - a_{m-1} + a_{m-1} + \cdots + a_{n+1} - a_n \geq -\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{m-2}} - \cdots - \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{m-1-n}} + \cdots + 1\right)$$

כעת סכום סדרה הנדסית חיובית סופית קטן מסכום הסדרה האינסופית:

$$\frac{1}{2^{m-1-n}} + \cdots + 1 < \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

לכן

$$a_m - a_n > -\frac{2}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

נסמן

$$\varepsilon = \overline{\lim}\, a_n - \underline{\lim}\, a_n > 0$$

כעת כיוון ש $\frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ קיים מקום K_1 אחריו לכל $n > K_1$ מתקיים כי $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$

ולכן לכל $m > n > K\_1$ מתקיים $a_m - a_n > -\frac{\varepsilon}{3}$ ולכן $a_n - a_m < \frac{\varepsilon}{3}$.

יש תת סדרה השואפת לגבול העליון, ולכן קיים K_2 אחריו איברי תת סדרה גדולים מ$\overline{\lim}\, a_n - \frac{\varepsilon}{3}$

באופן דומה יש תת סדרה השואפת לגבול התחתון ולכן קיים K_3 אחריו איברי תת הסדרה קטנים $\underline{\lim}\, a_n + \frac{\varepsilon}{3}$

נסמן $K = \max\{K_1, K_2, K_3\}$ ניקח איבר a_n מתת הסדרה השואפת לגבול העליון, כך ש $n > K$.

ניקח איבר a_m מתת הסדרה השואפת לגבול התחתון כך ש $m > n$.

סה"כ

$$\overline{\lim}\, a_n - \frac{\varepsilon}{3} < a_n$$

$$a_m < \underline{\lim}\, a_n + \frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן

$$a_n - a_m > \overline{\lim}\, a_n - \frac{\varepsilon}{3} - \left(\underline{\lim}\, a_n + \frac{\varepsilon}{3}\right) = \overline{\lim}\, a_n - \underline{\lim}\, a_n - \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

בסתירה לכך ש

$$a_n - a_m < \frac{\varepsilon}{3}$$

63. יהי $0 < K < 1$ ותהי f המקיימת לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$.

תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = f(a_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת $a_n \to c \in \mathbb{R}$ וכן כי $f(c) = c$.

<u>הוכחה</u>: נראה כי מדובר בסדרת קושי ולכן היא מתכנסת.

$$|a_3 - a_2| = |f(a_2) - f(a_1)| \leq K|a_2 - a_1|$$

$$|a_4 - a_3| = |f(a_3) - f(a_2)| \leq K|a_3 - a_2| \leq K^2|a_2 - a_1|$$

ניתן להוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$|a_{n+1} - a_n| < K^{n-1}|a_2 - a_1|$$

כעת, יהיו $m > n$ מתקיים כי

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\leq K^{m-2}|a_2 - a_1| + \cdots + K^{n-1}|a_2 - a_1| = K^{n-1}|a_2 - 1|(K^{m-n-1} + \cdots + 1)$$

כעת סכום סדרה הנדסית חיובית סופית קטן מסכום הסדרה האינסופי

$$K^{m-n-1} + \cdots + 1 < \sum_{k=0}^{\infty} K^k = \frac{1}{1-K}$$

הטור ההנדסי מתכנס הרי $0 < K < 1$. לכן סה"כ

$$|a_m - a_n| \leq \frac{K^{n-1}}{1-K}|a_2 - a_1| \to 0$$

הגבול שואף לאפס, שוב כיוון ש $0 < K < 1$.

לכן קיים מקום N אחריו לכל $n > N$ מתקיים כי $\frac{K^{n-1}}{1-K}|a_2 - a_1| < \varepsilon$

ובפרט לכל $m > n > N$ מתקיים כי $|a_m - a_n| < \varepsilon$

64. תהי סדרה a_n כך שקיימים $\varepsilon > 0$ ו$K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n > K$ מתקיים כי $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$, הופריכו: $|a_n| \to \infty$.

<u>הוכחה</u>: כיוון ש$|a_n| \geq 0$ הגבולות החלקיים שלה אינם שליליים, ובוודאי $-\infty$ אינו גבול חלקי.

לכן אם $|a_n| \nrightarrow \infty$ אזי יש לה גבול חלקי סופי, נב"ש שזה המצב.

תהי תת סדרה המתכנסת לגבול סופי

$$a_{k_n} \to L \in \mathbb{R}$$

קיים מקום N שאחריו לכל $n > N$ מתקיים כי

$$\left|a_{k_n} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח $n > \max\{N, K\}$ ולכן

$$\left|a_{k_n} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|a_{k_{n+1}} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

וכיוון ש $a_{k_n}, a_{k_{n+1}} \in \left(L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

נובע כי

$$\left|a_{k_{n+1}} - a_{k_n}\right| < \varepsilon$$

בסתירה לנתון, הרי $k_{n+1} > k_n > n > K$.

65. תהי סדרה כך ש$a_1 = 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון –

מבט זריז באיברי הסדרה הראשונים ... $0,2,\frac{2}{3},\frac{6}{5},\frac{10}{11},$ מעלה את הרעיון לחלק את הסדרה לשתי תתי סדרות מונוטוניות.

ראשית, נביע איבר בסדרה בעזרת הקודם-קודם לו.

לכל $n > 1$ מתקיים כי:

$$a_{n+1} = \frac{2}{1 + a_n} = \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + a_{n-1}}} = \frac{2}{\left(\frac{1 + a_{n-1} + 2}{1 + a_{n-1}}\right)} = \frac{2 + 2a_{n-1}}{3 + a_{n-1}}$$

כעת נבחן את ההפרש בין איבר לאיבר הקודם קודם לו:

$$a_{n+1}-a_{n-1}=\frac{2+2a_{n-1}}{3+a_{n-1}}-a_{n-1}=\frac{2+2a_{n-1}-3a_{n-1}-a_{n-1}^2}{3+a_{n-1}}=\frac{-a_{n-1}^2-a_{n-1}+2}{3+a_{n-1}}=\frac{-(a_{n-1}+2)(a_{n-1}-1)}{3+a_{n-1}}$$

קל להוכיח באינדוקציה כל כי איברי הסדרה אי שליליים, ולכן איבר גדול מהקודם קודם לו אם ורק אם הוא קטן מ1, וקטן מהקודם קודם לו אם ורק אם הוא גדול מ1.

נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_{2n-1}<1$ ולכן מדובר בתת סדרה מונוטונית עולה (וחסומה מלעיל ע"י 1) ולכן מתכנסת לגבול סופי (שנחשב בהמשך).

כמו כן נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_{2n}>1$ ולכן מדובר בתת סדרה מונוטונית יורדת (וחסומה מלרע ע"י 1) ולכן מתכנסת גם היא לגבול סופי (שנחשב בהמשך).

נעזר באינדוקציה:

$$a_1=0<1$$

יהי n עבורו $a_{2n-1}<1$ נוכיח כי $a_{2n+1}<1$

$$a_{2n+1}=\frac{2+2a_{2n-1}}{3+a_{2n-1}}$$

נפתור את אי השיוויון

$$\frac{2+2a_{2n-1}}{3+a_{2n-1}}<1$$

נכפול במכנה החיובי

$$2+2a_{2n-1}<3+a_{2n-1}$$

זה נכון אם ורק אם

$$a_{2n-1}<1$$

וזו בדיוק הנחת האינדוקציה.

באופן דומה ניתן להוכיח באינדוקציה כי $a_{2n}>1$ לכל n.

כעת שתי תתי הסדרות מונוטוניות וחסומות ולכן מתכנסות לגבולות סופיים.

נסמן $a_{2n+1}\to L$ חשב את גבול שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$a_{2n+1}=\frac{2+2a_{2n-1}}{3+a_{2n-1}}$$

ונקבל כי

$$L = \frac{2+2L}{3+L}$$

(כיוון שהסדרה אי שלילית הגבול אינו שלילי ואין סכנה של חלוקה באפס)

$$3L + L^2 = 2 + 2L$$

$$L^2 + L - 2 = 0$$

$$(L+2)(L-1) = 0$$

כאמור, הגבול אינו שלילי ולכן בהכרח $L = 1$.

באופן דומה לחלוטין נובע כי $a_{2n} \to 1$

לכן הן תת הסדרה במקומות הזוגיים והן תת הסדרה במקומות הזוגיים שואפות ל1. כיוון שמדובר במספר סופי של תתי סדרות המכילות את כל איברי הסדרה ושואפות לאותו גבול נובע כי זה גבול הסדרה.

כלומר הוכחנו ש $a_n \to 1$.

66. תהיינה שלוש סדרות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n \le b_n \le c_n$. עוד נניח כי $liminf\, a_n = limsup\; c_n = L$.

הופריכו: $b_n \to L$.

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon > 0$

כיוון ש $\underline{\lim}\, a_n = L$ קיים מקום K_1 שאחריו לכל $n > K_1$ מתקיים כי $a_n > L - \varepsilon$

(אחרת היו אינסוף איברי סדרה שקטנים מ$L - \varepsilon$ ומתוכם היה מתקבל גבול חלקי שקטן מהגבול התחתון בסתירה).

באופן דומה, כיוון ש $\overline{\lim}\, c_n = L$ קיים מקום K_2 שאחריו לכל $n > K_2$ מתקיים כי $c_n < L + \varepsilon$

נבחר $K = \max\{K_1, K_2\}$ ואחריו לכל $n > K$ מתקיים כי

$$L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$$

ולכן הוכחנו כי $a_n \to L$ לפי ההגדרה.

67. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל הממשיים, כך שהגבולות $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$ קיימים וסופיים. הופריכו: f חסומה.

<u>הוכחה</u>:

נב"ש שהפונקציה אינה חסומה מלעיל (הוכחה עבור חסם מלרע דומה).

לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת נקודה $x_n \in \mathbb{R}$ כך ש

$$f(x_n) > n$$

לכן לפי חצי סנדוויץ' מתקיים כי

$$\lim f(x_n) = \infty$$

ניקח תת סדרה של x_n המתכנסת במובן הרחב לגבול סופי או אינסוף

$$x_{k_n} \to L$$

אם $L \in \mathbb{R}$ סופי אזי כיוון שהפונקציה רציפה ב$x = L$ מתקיים כי

$$f\left(x_{k_n}\right) \to f(L)$$

בסתירה לכך ש

$$f\left(x_{k_n}\right) \to \infty$$

כמו כן, אם $L = \infty$

כיוון שנתון שהגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיים וסופי, $f\left(x_{k_n}\right)$ שואפת אליו ולא לאינסוף בסתירה.

כמובן שאם $L = -\infty$ אנחנו מקבלים סתירה באופן דומה, הרי גם שם הגבול סופי.

Yeet.