פיסיקה למתמטיקאים

המשפט הויריאלי

המשפט הויריאלי:
נתון המילטוניאן מהצורה $H = \frac{p^2}{2m} + \lambda x^2 = T + V$. אזי מתקיים $2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$.
הוכחה: נחשב תחילה את הקומוטטור $[H, xp]$.

$$[H, xp] = [\frac{p^2}{2m} + \lambda x^n, xp] = \frac{1}{2m}[p^2, xp] + \lambda[x^n, xp] = \frac{1}{2m}[p^2, x]p + \lambda x[x^n, p],$$

כאשר בשוויון האחרון נעזרנו בזהות $[A, BC] = B[A, C] - [A, B]C$. כעת, ע"י שמוש בזהות $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ כאשר $[B, [A, B]] = 0$, ולכן $[x^n, p] = nx^{n-1}[x, p]$ כאשר $[p, [x, p]] = 0$, נקבל

$$[H, xp] = -\frac{1}{2m}[x, p^2]p + \lambda xnx^{n-1}[x, p] =$$

$$= \left(-2\frac{p^2}{2m} + \lambda nx^n\right)[x, p] = (-2T + nV)i\hbar,$$

כאשר בחישוב הקומוטטור $[x, p^2]$ נעזרנו שנית בזהות $[A, BC] = B[A, C] - [A, B]C$, ו $[x, p] = i\hbar$.

כעת, נראה כי $\langle[H, xp]\rangle = 0$.

נניח כי $\{|n\rangle\}$ קבוצת המצבים העצמיים של H, בהצגת האנרגיה, עם ערכים עצמיים E_n. אזי לכל n

$$\langle[H, xp]\rangle = \langle n|[H, xp]|n\rangle = \langle n|Hxp|n\rangle - \langle n|xpH|n\rangle =$$

$$= \langle n|E_nxp|n\rangle - \langle n|xpE_n|n\rangle = E_n\langle n|xp|n\rangle - E_n\langle n|xp|n\rangle = 0,$$

ולכן

$$\langle[H, xp]\rangle = (-2\langle T\rangle + n\langle V\rangle)i\hbar = 0,$$

וסיימנו.