הרצאה 4

תזכורת

שיעורים קודמים ראינו ש A קבוצה חלקית של B אם לכל $x\in A$ מתקיים ש $x\in B$.

הגדרנו את המכפלה הקרטזית של A,B ע"י $A\times B=\left\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in B\right\}$.

הגדרה

קבוצה חלקית R של $A\times B$ נקראת יחס מ A ל B. אם $A=B$ אומרים שזה יחס מעל A.

סימון – את האיבר $(a,b)\in R$ נסמן ע"י aRb

דוגמאות

1. $A=\{1,2,3\},B=\{5,7,8\}$ $R=\{(1,7),(3,8)\}$. מכיוון ש $R\subseteq A\times B$ אז R הוא יחס מ A ל B.
2. $A=\{1,2,3\}$ $R=\{(x,y)\in A\times B\,|\,x\le y\}$ ואז $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$.

מכיוון ש $R\subseteq A\times A$ אז R יחס מעל A. מכיוון ש $(1,2)\in R$ ניתן לרשום $1R2$.

3. $A=\{1,2,3\}$ $R=\phi$ יחס מעל A (שנקרא היחס הריק) מכיוון ש $\phi\subseteq A\times A$.
4. עבור קבוצה כלשהי A $R=A\times A$ יחס מעל A (שנקרא היחס המלא)

יחס רפלקסיבי

תהיי A קבוצה כלשהי ויהי R יחס מעל A. נאמר ש R יחס רפלקסיבי אם $a\in A\Leftarrow(a,a)\in R$.

דוגמאות

1. בדוגמה הקודמת R הוא יחס רפלקסיבי מכיוון ש:
   i. R הוא יחס מעל A.
   ii. $A=\{1,2,3\}$ ו $(1,1)\in R,(2,2)\in R,(3,3)\in R$ ז"א לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר קבוצה R - לכל $i,j\in I$

   $(A_i,A_j)\in R\Leftrightarrow A_i\subseteq A_j$.
   i. R הוא יחס מעל A.
   ii. מכיוון שלכל קבוצה B מתקיים $B\subseteq B$ נקבל שלכל $i\in I$ $(A_i,A_i)\in R$.

יחס סימטרי

תהיי A קבוצה כלשהי ויהי R יחס מעל A. נאמר ש R יחס רפלקסיבי אם $(a,b)\in R\Leftarrow(b,a)\in R$.

דוגמאות

1. $A=\{1,2\}$
   i. $R_1=\{(1,1)\}$ יחס סימטרי.
   ii. $R_2=\{(1,2)\}$ לא יחס סימטרי מכיוון ש $(1,2)\in R$ אבל $(2,1)\notin R$.
   iii. $R_3=\{(1,2),(2,1)\}$ יחס סימטרי.
   iv. היחס הריק הוא יחס סימטרי.
   v. היחס המלא הוא יחס סימטרי.

יחס טרנזיטבי

תהיי A קבוצה כלשהי ויהי R יחס מעל A. נאמר ש R יחס רפלקסיבי אם

$(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\Leftarrow(a,c)\in R$.

דוגמה

תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר קבוצה R - לכל $i,j\in I$ $A_i\subseteq A_j\Leftrightarrow(A_i,A_j)\in R$.

מכיוון שלכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\subseteq C \Leftarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq C$

<u>יחס שקילות</u>

תהיי A קבוצה כלשהי ויהי R יחס מעל A. נאמר ש R יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>דוגמאות</u>

1. היחס המלא הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות.
2. היחס הריק לא סימטרי ולכן הוא לא יחס שקילות.
3. תהיי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהיינה $A_1=\{1,4\}, A_2=\{3\}, A_3=\{2\}$ תתי קבוצות של A. נסמן

$I=\{1,2,3\}$ נגדיר יחס R מעל A באופן הבא: $R=\{(a,b)\in A\times A \mid \exists i\in I: a\in A_i \wedge b\in A_i\}$

ואז $R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(3,3)\}$. שימו לב: R הוא יחס שקילות. שימו לב:

$$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup A_3\times A_3=\bigcup_{i\in I}A_i\times A_i$$

האם נוכל לבנות יחס שקילות מכל משפחה של תתי קבוצות של $A=\{1,2,3,4\}$?

תהיינה $A_1=\{1,3\}, A_2=\{2\}$ שימו לב שאם נבנה את הקבוצה R כפי שבנינו אותה בדוגמה הקודמת נקבל ש $R=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)\}$. R לא רפלקסיבי מכיוון ש $(4,4)\notin R$.

ההבדל בין הדוגמה הנ"ל לדוגמה הקודמת הוא:

בדוגמה הקודמת $\bigcup_{i\in I}A_i = A$ ובדוגמה הנ"ל $\bigcup_{i\in I}A_i \neq A$.

ואם ניקח משפחה של תתי קבוצות המקיימת $\bigcup_{i\in I}A_i = A$?

תהיינה $A_1=\{1,3\}, A_2=\{3,4\}, A_3=\{2\}$ ואז

$R=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(2,2)\}$ שימו לב ש $(1,3)\in R\wedge(3,4)\in R$

אבל $(1,4)\notin R$ ולכן R לא יחס טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ומה ההבדל במקרה זה? שימו לב: $A_1\cap A_2\neq\phi$.

<u>חלוקה</u>

קבוצה של תתי קבוצות לא ריקות של קבוצה A $\{A_i\}_{i\in I}$ נקראת חלוקה של A אם:

1. $\bigcup_{i\in I}A_i = A$.
2. $A_i\cap A_j\neq\phi \Rightarrow i=j$.

<u>דוגמה</u>

$A=\mathbb{N}$, $A_1=2\mathbb{N}, A_2=2\mathbb{N}-1$ אז $\{A_1,A_2\}$ חלוקה של A.

<u>מחלקת שקילות</u>

יהי R יחס שקילות מעל A ויהי $a\in A$ הקבוצה $\{b\in A \mid (a,b)\in R\}$ נקראת מחלקת השקילות של a ומסומנת ע"י $[a]_R$.

<u>דוגמה</u>

נתבונן ביחס $R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(3,3)\}$ מעל $A=\{1,2,3,4\}$.

$[1]_R=\{1,4\},[2]_R=\{2\},[3]_R=\{3\}$.

<u>משפט</u>

הטענות הבאות שקולות:

א. $[a]=[b]$.

ב. $a\in[b]$.

ג. $[a]\cap[b]\neq\phi$.

<u>הוכחה</u>

א $\Leftarrow$ ב

נתון ש $[a]=[b]$ מכיוון ש R יחס שקילות אז הוא יחס רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $a\in[a]$ מכיוון ש $[a]=[b]$ נקבל את הדרוש.

ב $\Leftarrow$ ג

נתון ש $a\in[b]$ מכיוון ש R יחס שקילות אז הוא יחס רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $a\in[a]$ ולכן $a\in[a]\cap[b]$.

ג $\Leftarrow$ א

נתון ש $[a]\cap[b]\neq\phi$ ז"א שקיים $x\in A$ כך ש $x\in[a]\wedge x\in[b]$ ומהגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $(a,x)\in R\wedge(b,x)\in R$ מכיוון ש R יחס סימטרי נקבל ש $(x,a)\in R$ ומכיוון ש R יחס טרנזיטיבי נקבל ש $(b,a)\in R$.

יהי $y\in[a]$ על פי הגדרת מחלקת שקילות $(a,y)\in R$ מכיוון ש $(b,a)\in R$ ו R יחס טרנזיטיבי נקבל ש $(b,y)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות $y\in[b]$ ז"א $[a]\subseteq[b]$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $[b]\subseteq[a]$ ולקבל את הדרוש.

<u>מסקנה</u>

יהי R יחס שקילות על A, אזי $\{[a]_R : a\in A\}$ הוא חלוקה של A.

<u>היחס המושרה ע"י החלוקה</u>

יהי $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A, אזי $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ הוא יחס שקילות על A. קוראים לו **היחס המושרה** ע"י החלוקה.

<u>הוכחה</u>

רפלקסיביות – יהי $a\in A$ מכיוון ש $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A מתקיים $\bigcup_{i\in I}A_i=A$ ז"א $a\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i$ מכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(a,a)\in R$.

סימטריות – יהי $(a,b)\in R$ מכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ אז $(a,b)\in\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ ז"א קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge b\in A_i$ ולכן $(b,a)\in A_i\times A_i$ ומכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(b,a)\in R$.

טרנזיטיביות – נניח ש $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R$ מכיוון ש $(a,b)\in R$ ו $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge b\in A_i$. מכיוון ש $(b,c)\in R$ קיים $j\in I$ כך ש $b\in A_j\wedge c\in A_j$. קיבלנו ש $b\in A_i\cap A_j\Rightarrow A_i\cap A_j\neq\phi$ מכיוון ש $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A נקבל ש $i=j$.

סה"כ קיבלנו שקיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i \wedge c\in A_i$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש $(a,c)\in A_i\times A_i$ ומכיוון ש $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(a,c)\in R$.

מסקנה

קיימת התאמה בין החלוקות של A לבין יחסי השקילות על A.

דוגמה

לכל $i\in N$ תהי $A_i=\{x\in R : i\le x<i+1\}$. האוסף $\{A_i : i\in N\}$ הוא חלוקה של הממשיים. היחס המושרה הוא $\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor$ שפירושו, החלק השלם של x מלמטה שווה לחלק השלם של y מלמטה.

קבוצת המנה

עבור יחס שקילות R נתבונן בחלוקה המושרת מהיחס.

עבור כל קבוצה כזאת נבחר נציג. קבוצת הנציגים נקראת קבוצת המנה ותסומן ע"י A/R.

דוגמה

יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ ויהי m מספר טבעי הגדול מ 1 אז $a=b\pmod m$ אם ורק אם קיים מספר $k\in\mathbb{Z}$ כך ש $a=b+k\cdot m$.

יחס השקילות מודולו $a,b\in\mathbb{Z}$ הוא היחס הבא: $R_m=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Z}\wedge a=b\pmod m\}$.

מחלקות השקילות של R_3 הם:

$$[0]_{R_3}=\{\dots,-6,-3,0,3,6,0\dots\}$$

$$[1]_{R_3}=\{\dots-5,-2,1,4,3,0\dots\}$$

$$[2]_{R_3}=\{\dots,-4,-1,2,5,\dots\}$$

נבחר מכל מחלקת שקילות נציג ונקבל את קבוצת המנה: $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.