

הרצאה 4

היחס המושרה ע"י החלוקה

יהי $\{A_i : i \in I\}$ חלוקה של A , אזי $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ הוא יחס שקילות על A . קוראים לו **היחס המושרה ע"י החלוקה**.

הוכחה

רפלקסיביות – יהי $a \in A$ מכיוון ש $\{A_i : i \in I\}$ חלוקה של A מתקיים $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ ז"א $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ולכן

קיים $i \in I$ כך ש $a \in A_i$ מכיוון ש $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ נקבל ש $(a, a) \in R$.

סימטריות – יהי $(a, b) \in R$ מכיוון ש $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ אז $(a, b) \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ ז"א קיים $i \in I$ כך ש

$(a, b) \in A_i \times A_i$ ולכן $a \in A_i \wedge b \in A_i$ ומכיוון ש $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ נקבל ש $(b, a) \in R$.

טרנזיטיביות – נניח ש $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ מכיוון ש $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ ו $(a, b) \in R$ קיים $i \in I$ כך

ש $a \in A_i \wedge b \in A_i$. מכיוון ש $(b, c) \in R$ קיים $j \in I$ כך ש $b \in A_j \wedge c \in A_j$. קיבלנו ש

$b \in A_i \cap A_j$ ז"א $b \in A_i \cap A_j \neq \emptyset$ מכיוון ש $\{A_i : i \in I\}$ חלוקה של A נקבל ש $i = j$.

סה"כ קיבלנו שקיים $i \in I$ כך ש $a \in A_i \wedge c \in A_i$ ולכן קיים $i \in I$ כך ש $(a, c) \in A_i \times A_i$ ומכיוון ש

$(a, c) \in R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ נקבל ש $(a, c) \in R$.

מסקנה

קיימת התאמה בין החלוקות של A לבין יחסי השקילות על A .

דוגמה

לכל $i \in \mathbb{Z}$ תהי $A_i = \{x \in \mathbb{R} : i \leq x < i+1\}$. האוסף $\{A_i : i \in \mathbb{Z}\}$ הוא חלוקה של הממשיים. היחס

המושרה הוא $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ שפירושו, החלק השלם של x מלמטה שווה לחלק השלם של y מלמטה.

קבוצת המנה

עבור יחס שקילות R נתבונן בחלוקה המושרת מהיחס.

עבור כל קבוצה כזאת נבחר נציג. קבוצת הנציגים נקראת קבוצת המנה ותסומן ע"י A/R .

דוגמאות

1. יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$ ויהי m מספר טבעי הגדול מ 1 אז $a = b \pmod{m}$ אם ורק אם קיים מספר $k \in \mathbb{Z}$ כך

$$a = b + k \cdot m$$

יחס השקילות מודולו $a, b \in \mathbb{Z}$ הוא היחס הבא: $R_m = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge a = b \pmod{m}\}$.

מחלקות השקילות של R_3 הם:

$$[0]_{R_3} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 0\dots\}$$

$$[1]_{R_3} = \{\dots -5, -2, 1, 4, 3, 0\dots\}$$

$$[2]_{R_3} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$$

נבחר מכל מחלקת שקילות נציג ונקבל את קבוצת המנה: $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$.

2. תהיי $A \neq \emptyset$. ליחס המלא יש רק מחלקת שקילות אחת והיא A .

3. תהיי $A \neq \emptyset$. ליחס הזהות, מחלקות השקילות הן כל הקבוצות מהצורה $\{a\}$, כאשר $a \in A$.

4. נגדיר יחס R על \mathbb{C} באופן הבא: $(z_1, z_2) \in R \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$. הוא יחס שקילות.

$[z_1]_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |z_1|\}$. המשמעות הגיאומטרית – מעגל שרדיוסו $|z_1|$. שימו לב:

$$\mathbb{C}/R = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$$

מטרה – הגדרת סדר בקבוצה.

דוגמה

נתבונן בקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

מיהו האיבר הראשון בקבוצה?

לפי מה שלמדנו עד עכשיו האיבר הראשון בקבוצה הוא 1.

ישנם מקרים שהסדר משתנה.

למשל: נניח שהמספרים בקבוצה מציינים את מספר הניצחונות בתחרות טניס.

במקרה כזה 5 יציין את המקום הראשון והוא יהיה האיבר הראשון.

אנחנו שמים לב שיש צורך להגדיר את סדר האיברים בקבוצה, מכיוון שהסדר יכול להשתנות לפי ההקשר.

במהלך ההרצאה R הוא יחס על קבוצה A אלא אם כן נאמר אחרת.

יחס אנטי-סימטרי

נאמר ש R יחס אנטי סימטרי אם $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

דוגמה

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ היחס $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ הוא אי-רפלקסיבי.

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ היחס $R = \{(1, 1), (2, 3)\}$ הוא לא אי-רפלקסיבי.

יחס משווה

נאמר ש R הוא יחס משווה אם לכל $a, b \in A$ מתקיים אחד מהמקרים הבאים:

i. $(a, b) \in R$

ii. $(b, a) \in R$

iii. $a = b$

דוגמה

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ היחס $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ לא משווה מכיוון ש $(1, 4) \notin R \wedge (4, 1) \notin R$.

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ היחס $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (3, 1), (2, 4)\}$ הוא יחס משווה.

יחס סדר חלקי

יהי R יחס מעל $A \neq \emptyset$. נאמר ש R יחס סדר חלקי אם הוא:

i. טרנזיטיבי.

ii. רפלקסיבי.

iii. אנטי סימטרי.

דוגמאות

1. תהיי $A = \{A_i\}_{i \in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר את היחס מעל A ע"י $(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow A_i \subseteq A_j$.

נקבל יחס סדר חלקי.

i. $A = \{A_i\}_{i \in I}$ כאשר $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{4\}$ ואז
 $R = \{(A_1, A_1), (A_2, A_2), (A_3, A_3), (A_4, A_4), (A_3, A_2), (A_3, A_1), (A_4, A_2)\}$
 שאין יחס בין A_3, A_4 .

ii. $A = \{A_i\}_{i \in I}$ כאשר $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{2\}$
 $R = \{(A_1, A_1), (A_2, A_2), (A_3, A_3), (A_3, A_1), (A_3, A_2), (A_2, A_1)\}$

2. דוגמה ליחס שהוא לא סדר חלקי. יחס מעל \mathbb{C} המוגדר באופן הבא: $(z_1, z_2) \in R \Leftrightarrow |z_1| \leq |z_2|$. היחס לא
 אנטי סימטרי מכיוון ש $(1+2i, 2+i) \in R \wedge (2+i, 1+2i) \in R$ אבל $1+2i \neq 2+i$.

יחס סדר מלא

יחס סדר חלקי R מעל A יחס סדר מלא אם הוא משווה.

דוגמאות

1. היחס \leq על \mathbb{N} הוא יחס סדר מלא.

2. תהיי $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ונגדיר את יחס באופן הבא:

$$R = \{(a, b) \in A \times A : b \text{ מחלק את } a\}$$

R הוא יחס סדר מלא –

i. טרנזיטיבי – אם $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ אז a מחלק את b וגם b מחלק את c מכיוון

ש a מחלק את b קיים מספר שלם k כך ש $b = k \cdot a$ ומכיוון ש b מחלק את c קיים
 מספר שלם l כך ש $c = l \cdot b$ ולכן $c = (l \cdot k) \cdot a$ ולכן a מחלק את c ז"א $(a, c) \in R$.

ii. רפלקסיבי – מכיוון שלכל $a \in A$ מחלק את עצמו.

iii. אנטי סימטרי – מכיוון שאם a מחלק את b ו b מחלק את a אז $a = b$.

iv. משווה – אם $a \in A$ אז קיים מספר טבעי n כך ש $a = 2^n$, אם $b \in A$ קיים מספר טבעי
 m כך ש $b = 2^m$.

a. אם $n > m$ אז $a = 2^{n-m} \cdot b$ ואז $(b, a) \in R$.

b. אם $m > n$ אז $b = 2^{m-n} \cdot a$ ואז $(a, b) \in R$.

c. אם $m = n$ אז $a = b$.

הערה

אם נגדיר את היחס $\{a\}$ מחלק את b ושונה נמנו: $R = \{(a, b) \in A \times A : a = b\}$ כאשר $A = \mathbb{N}$ אז R לא יהיה יחס

משווה מכיוון ש $(3, 2) \in R \wedge (2, 3) \notin R$ ואז היחס הוא יחס סדר חלקי.

נשים לב שבמקרה הנ"ל כן ניתן לסדר את האיברים – נמחיש זאת באמצעות דיאגרמת Hasse.

