<u>אלגברה מופשטת 1 קיץ 2013</u>

<u>תרגול 11</u>

הערה: אפריורית אין בחבילות הבסיס של $LaTeX$סימן של איחוד זר (אני עצמי עצלן מכדי לתכנת פונקציה שתעשה זאת) ולכן סימנתי אותו כ$\sqcup$.

הערה נוספת:בכל מקום בו לא ניקדתי, סימן שמדובר במֶרְכָּז $Z(G)$ ולא במֵרְכָּז C_a.

<u>הגדרה:</u>

1.תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. נקודת שבת של g∈Gהיא נקודה $x \in X$ כך שמתקיים $g * x = x$.

2.עבור $g \in G$נסמן בX_gאת אוסף נקודות השבת של g: $X_g = \{x \in X : g * x = x\}$

למשל $X_e = X$

3. נאמר ש$x \in X$ היא נקודת שבת של Gאם לכל $g \in G$,$g * x = x$.

(נקראת גם "נקודת שבת משותפת")

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפעולה $G \times X \to X$, כאשר $|X| = 23, |G| = 49$. הוכיחו שקיימת לפעולה זו נק' שבת משותפת. (הערה:לפעולה של כפל משמאל (נדבר עליה בהמשך) אין נקודות שבת משותפות. אין נקודה שכל החבורה לא מזיזה אותה.($G \times G \to G$ כך ש$g * h = gh$ אזי $(\nexists h \in G : \forall g \in G, gh = h$

לגבי מסלול $orb(x) = G * x = \{g * x \mid g \in G\}$ ידוע ש$|G * x| \mid |G|$ (כי $|G * x| = \sum [G : Stb(x)]$).

הערה: X הוא איחוד זר של המסלולים כלומר $X = \bigsqcup_{x_i \in X} G * x_i$.$\Leftarrow$ $|X| = \sum |G * x_i|$.

<u>שימו לב:</u> אם $|G * x_i| = 1$ אזי x_iהיא נקודת שבת משותפת. לכן נוכיח שקיים x_iשכזה.

לכל x_i: $|G * x_i| \mid |G|$. לכן $|X|$ הוא סכום $23 = |X| = n \cdot 1 + m \cdot 7 + k \cdot 49$. כמובן $k = 0$. $23 = n \cdot 1 + m \cdot 7$. לא יתכן ש$n = 0$ שכן $7 \nmid 23$ולכן $n > 0$.

לכן יש לפחות מסלול אחד באורך 1 $\Leftarrow$קיימת לפחות נק' שבת משותפת אחת. מ.ש.ל.$\Box$.

<u>קצת סדר לגבי מונחים מרכזיים:</u>$G \times X \to X$

-מסלול $[x] = orb(x) = G * x = \{g * x \mid g \in G\}$.

-$X = \bigsqcup_{x_i \in X} G * x_i$

-$|G*x_i| \mid |G|$.

-המייצב: $G \geq Stb(x)=\{g\in G: g*x=x\}$.

-$|G*x_i|=[G:Stb(x)]$

-פעולת ההצמדה:

למסלול תחת פעולת ההצמדה נקרא $G*x_i=conj(x)=\{gxg^{-1}: g\in G\}$

למייצב תחת פעולת ההצמדה אנו קוראים המְרַכֵּז

$Stb(x)=C_x=\{g\in G: gxg^{-1}=x\}$ וכמו כן: $Z(G)\subseteq C_x$.

<u>הלמה של ברנסייד Burnside</u>

תהא G חבורה סופית הפועלת על קבוצה X. נסמן: k- מס' המסלולים של הפעולה, אזי: $k=\frac{1}{|G|}\sum|X_g|$.

<u>תרגיל:</u>

אנו מעוניינים לצבוע סרט עם 6 משבצות ב-4 צבעים. שני סרטים הם שקולים אם אפשר להגיע מאחד לשני ע"י שיקוף. מצאו את מספר האפשרויות השונות לצביעת הסרט (עד כדי שקילות).

<u>פתרון:</u>

נגדיר את המבנים $\underline{G=\mathbb{Z}_2, X=(\mathbb{Z}_4)^6}$ (כאשר X קבוצה עליה אנו מפעילים את החבורה G)

$0*(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$

וכן מתקיים:

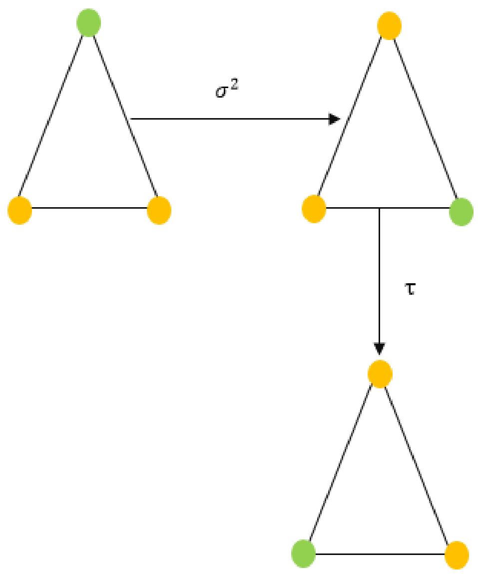
$1*(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(x_6,x_5,x_4,x_3,x_2,x_1)$

מחפשים את מספר המסלולים של הפעולה: $k=\frac{1}{2}(|X_0|+|X_1|)$.

נשים לב ש:$X_0=X\Rightarrow|X_0|=4^6$ (כיוון שאין הגבלות על בחירת הצבע כי הזהות לא מזיזה), $|X_1|=4^3$. כלומר $k=\frac{1}{2}(4^3+4^6)$.) מ.ש.ל.

<u>תרגיל:</u>מצאו את מספר המשולשים השונים (עד כדי סיבוב ושיקוף) אשר מתקבלים ממשולש משוכלל נתון, אם מותר לצבוע כל קודקוד בשלושה צבעים שונים.

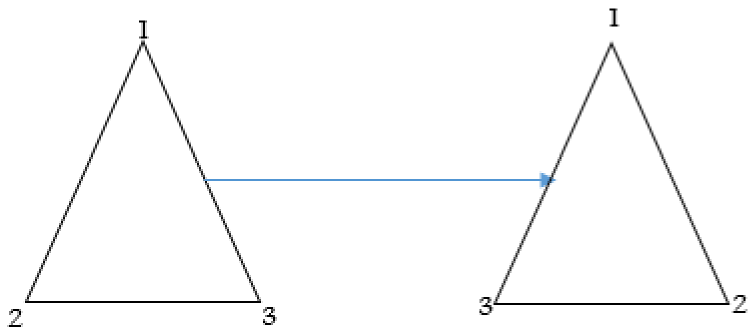
שרטוט להמחשת התרגיל:



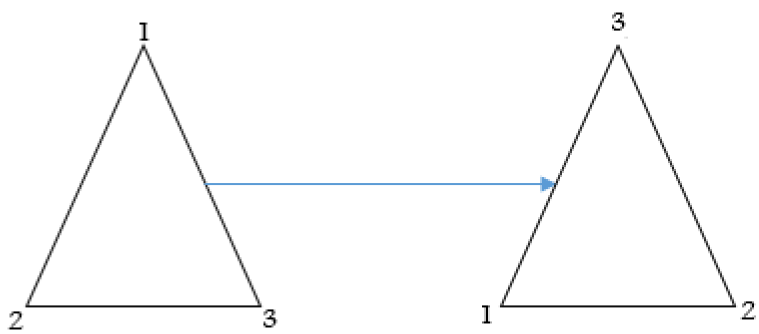
$G = D_3, X = (\mathbb{Z}_3)^3$ (כאשר ה3 התחתי מיועד למס' הצבעים והעילי למס' הקודקודים).

$|X_{id}| = |X| = 3^3$

$|X_\tau| = 3^2 = |X_{\tau\sigma}| = |X_{\tau\sigma^2}|$ כמו שניתן לראות לדוגמה בציור הבא:



$|X_\sigma| = 3 = |X_{\sigma^2}|$ (השיוויון נובע כיוון שσ^2היא סיבוב בכיוון הנגדי).



לכן מס' הצביעות (המסלולים) השונות הוא:

$k=\frac{1}{6}(3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3)$. מ.ש.ל

<u>חבורות p</u>

<u>הגדרה:</u> Gהיא חבורת p אם $|G|=p^n$.

[חזרה טובה] נוכיח שהמרכז של חבורת pהוא לא טריוויאלי:

תהא G חבורת p:$|G|=p^n$. נחקור את מחלקות הצמידות והמרכז שלה. נתבונן בפעולה של Gעל עצמה ע"י הצמדה: $G\times G\to G$.

$g*x\mapsto gxg^{-1}$. לפעולה זו יש מסלולים $x_i\in G: conj(x_i)$ומתקיים $G=\bigsqcup conj(x_i)$. נזכיר: $x_i\in Z(G)\Leftrightarrow conj(x_i)=\{x_i\}$.

$G=Z(G)\cup\bigsqcup_{x\notin Z(G)} conj(x_i)\Rightarrow |G|=|Z(G)|+\sum_{x_i\notin Z(G)}|conj(x_i)|$. המרכז הוא ת"ח ולכן הסדר שלו חזקה של p. כל אחד מהקונג'ים מחלק את הסדר של החבורה ולכן גם הם חזקה של p, ז"א:$p^n=p^\alpha+\sum\beta_i p^{\alpha_i}$. אם נניח בשלילה שהמרכז אכן טריוויאלי נקבל:

$p^n-1=\sum\beta_i p^{\alpha_i}$. לא יתכן כיוון ש$p\mid\sum\beta_i p^{\alpha_i}$ אבל $p\nmid p^n-1$ וזו סתירה.

<u>לסיכום:</u> אם G חבורת p אזי $Z(G)\neq\{e\}$.

<u>משוואת המחלקות</u>

$|G|=|Z(G)|+\sum_{a\notin Z(G)}[G:C_a]$.

<u>תרגיל:</u>

כתבו את משוואת המחלקות של החבורה S_3.

<u>פתרון:</u>

המרכז של S_nעבור $n\geq 3$ הוא טריוויאלי $Z(S_n)=\{id\}$. כמו כן מס' מחלקות הצמידות

הוא $\rho(3)=3$.

הסבר: נזכור שתמורות ב־S_n הן צמודות אמ"ם יש להן אותו מבנה מחזורים. לכן מספר מחלקות הצמידות הוא כמספר מבני המחזורים. אצלנו מבני המחזורים הם $(-),(--),(---)$ $(-)(-)$. לכן: $6=1+3+2$.

<u>תרגיל (שימושי בש"ב):</u> תהא G חבורה לא אבלית מסדר p^3 ונניח $a\notin Z(G)$. הוכיחו:

א. $|Z(G)|=p$

ב. $|C_a|=p^2$.

ג. $|conj(a)|=p$

<u>פתרון:</u>

א. האפשרויות לסדרי המרכז הן $|Z(G)| = \{1, p, p^2, p^3\}$. נפסול אותן להנאתנו:

- p^3 לא יתכן כיוון וG לא אבלית
- 1 לא יתכן כיוון שהמרכז של חבורת p הוא לא טריוויאלי.
- אם $|Z(G)| = p^2 \Leftarrow |G/_{Z(G)}| = p$ ולכן $G/_{Z(G)}$ ציקלית בסתירה לטענה שהוכחנו.

לכן, $|Z(G)| = p$.

ב. $|C_a| = ?$.

$|C_a| \neq p^3$ כי אם $C_a = G$ אזי $a \in Z(G)$ בסתירה לנתון. מתקיים

$\{a\} \cup Z(G) \subseteq C_a \Rightarrow p < |\{a\} \cup Z(G)| \leq |C_a|$ ולכן $|C_a| = p^2$.

ג. $|conj(a)| = ?$

$|conj(a)| = [G : C_a] = \frac{p^3}{p^2} = p$.

מ.ש.ל

<u>דוגמה לתרגיל:</u>

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ אזי $|G| = 5^3$ ועל כן: $|Z(G)| = 5$.

<u>תרגיל :</u>

תהי Gחבורה מסדר p^n, $(n \geq 1)$. תהי $\{e\} \neq N \triangleleft G$. הוכיחו ש- $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.

<u>פתרון:</u>

אם $x \in Z(G)$ אזי $conj(x) = \{x\}$. על מנת להראות שהחיתוך הנ"ל אינו טריוויאלי מ"ל שקיים $e \neq y \in N$ כך ש-$conj(y) = \{y\}$ ($|conj(y)| = 1$).

<u>תזכורת:</u> כל תח"נ היא איחוד זר של מחלקות הצמידות של איבריה (לא נכון לגבי ת"ח רגילה!). לכן: $N = \bigsqcup_{x_i \in N} conj(x_i)$. $|N| = \sum_{x_i \in N} |conj(x_i)|$. $N \leq G \Leftarrow$ קיים $1 \leq k \leq n$: $|N| = p^k$.

$p^k = \sum_{x_i \in N} |conj(x_i)| = 1 + \sum_{e \neq x_i \in N} |conj(x_i)|$ ואזי $p^k - 1 = \sum \beta_i p^{\alpha_i}$ אם כל ה$\alpha_i > 0$נקבל סתירה. לכן קיים i: $\alpha_i = 0$ אך אז מקבלים שקיים $x_i \in N$כך ש:

$|conj(x_i)| = 1 \Rightarrow x_i \in Z(G) \Rightarrow e \neq x_i \in N \cap Z(G)$ וזה מוכיח את הדרוש. מ.ש.ל

<u>משפט קושי (השימושי והפשוט ביותר בתחום):</u>

תהא Gחבורה סופית ויהי p כך ש$p \mid |G|$ אזי קיים בGאיבר מסדר p.

למשל בחבורה מסדר 28 יש איבר מסדר 7 ויש איבר מסדר 2.

משפטי סילו Sylow

תהא Gחבורה כך ש$|G|=p^k m$ כאשר $(m,p)=1$. ת"ח p־סילו של G היא $H\leq G$כך ש$|H|=p^k$

דוגמה:

לדוגמה נביט ב:$|S_3|=2\cdot 3$.

ת"ח ־3סילו: $<(123)>=<(132)>$(הופכים אחד של השני).

ת"ח ־2סילו: $<(23)>,<(13)>,<(12)>$.

משפט סילו 1:

תהא Gחבורה סופית. אם $p\mid |G|$אז קיימת לG ת"ח p־סילו.

טענה: בחבורת pיש תת חבורה מכל סדר שמחלק את סדר החבורה.

מסקנה (מהטענה ומסילו):

לכל חבורה סופית G, אם $p^k\mid |G|$, אזי יש לG ת"ח מסדר p^k.

דוגמה:

נסתכל לדוגמה בD_4. $|D_4|=8=2^3$.

ת"ח 2־ סילו של D_4היא D_4בעצמה.

לפי המסקנה קיימת תת חבורה מסדר 4: למשל $<\sigma>$ות"ח מסדר 2: למשל $<\tau>$.

הערה חשובה: חבורת p־ סילו היא חבורת p המקסימלית.