רשימת משפטים וטענות

נכתב על ידי נועם יערי

1. אם לקבוצה יש חסם עליון אז הוא יחיד.
2. <u>אקסיומת החסם העליון:</u> לכל קבוצה A כך ש - $\mathbb{R} \ni A \neq \phi$, יש חסם עליון.
3. אם $a = \max A$ אז $a = \sup A$.
4. $a = \sup A \Leftrightarrow (A \leq a \ \wedge \forall b < a: \exists x \in A: x > b$.
5. אם לקבוצה יש חסם תחתון אז הוא יחיד.
6. אם $a = \min A$ אז $b = \inf A$
7. $a = \inf A \Leftrightarrow (a < A \wedge \forall a < b\ \exists c \in A: c < b)$
8. לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע יש חסם תחתון.
9. תכונת ארכימדס: $\forall \varepsilon > 0\ \forall x\ \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \varepsilon > x$ (לכל ε חיובי ו-x, קיים n טבעי כך ש - $n \cdot \varepsilon > x$)
10. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל יש מקסימום.
11. <u>צפיפות $\mathbb{Q}$ ב - $\mathbb{R}$:</u> בין כל שני מספרים ממשיים שונים יש מספר רציונלי.
12. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
13. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
14. $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$
15. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנת ויהי L הגבול שלה. יהיה $c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי הסדרה $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $c \cdot L$.
16. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות, יהיו M, L הגבולות שלהם בהתאמה כלומר $a_n \to L, b_n \to M$ אזי אם נגדיר $c_n = r \cdot a_n + s \cdot b_n$, הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול
$r \cdot L + s \cdot M$.
17. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אזי הקבוצה $\{a_1, a_2, ..\} \subseteq \mathbb{R}$ חסומה (מלעיל ומלרע).
18. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות לגבולות M, L בהתאמה, $c_n = a_n \cdot b_n$ אזי הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $M \cdot L$.
19. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות ששואפות לאותו גבול L. כלומר, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{b_n} = L$. תהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שלישית ונניח שקיים N, כל שלכל $n \geq N$, $a_n \leq c_n \leq b_n$ אזי בהכרח הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאותו גבול L.
20. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת עם גבול 0, תהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, אבל לא בהכרח מתכנסת, אזי הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ לגבול 0.
21. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה חסומה מלעיל, אזי היא מתכנסת והגבול הינו החסם העליון $\sup\{a_n\}$. גם כן, כל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת וחסומה מלרע מתכנסת, הגבול הינו $\inf\{a_n\}$.
22. $a_n = q^n, 0 < q < 1$ אזי $a_n \to 0$.
23. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אזי $a_n \to 0$ אם ורק אם $|a_n| \to 0$.

24. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. יהי L הגבול ונניח כי $L \neq 0$. אזי הסדרה $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ גם מתכנסת וגם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$.
25. אם $c > 0$ ו- $a_n \to \infty$ אז $c \cdot a_n \to \infty$.
26. אם $a_n \to \infty$ והסדרה b_n חסומה, אז $a_n + b_n \to \infty$.
27. אם $a_n \to \infty$, אז $\frac{1}{a_n} \to 0$.
28. אם $0 < a_n \to 0$, אז $\frac{1}{a_n} \to \infty$.
29. אם הסדרה a_n עולה ואינה חסומה מלעיל, אז $a_n \to \infty$.
30. <u>משפט בולצנו ויירשטראס :</u> לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.
31. <u>קריטריון קושי להתכנסות סדרות :</u> סדרה a_n היא מתכנסת $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ יש N שאחריו המרחק בין כל שני איברים בסדרה קטן מ - ε. (בפירוש: לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך ש $|a_n - a_m| < \varepsilon$ לכל $N < m, n$).
32. אם $a_n \leq c$ לכל n, ומתקיים $a_n \to a$, אז $a \leq c$.
33. לכל סדרה a_n יש גבול חלקי גדול ביותר.
34. לכל סדרה חסומה b_n יש גבול חלקי גדול ביותר.
35. לכל סדרה יש גבול תחתון (במובן הרחב).
36. סדרה a_n מתכנסת במובן הרחב $\leftrightarrow$ $\overline{\lim}(a_n) = \underline{\lim}\, a_n$.
37. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \to 0$.
38. התכונות הבאות שקולות :
    - הטור מתכנס.
    - כל זנב של הטור מתכנס.
    - יש לטור זנב שמתכנס.
39. שינוי, מחיקה, או הוספה של מספר סופי של מחוברים בטור אינם משפיעים על התכנסותו/התבדרותו (אבל כן משנים את סכומו). [כי לאחר השינוי יהי N כך שהזנב r_N של הטור החדש הוא זנב של הטור הישן (אולי מתחיל ממקום אחר)]
40. אם טור מתכנס אז זנבותיו מקיימים $r_m \to_{m\to\infty} 0$. $S = S_m + r_m \to r_m \to 0$.
41. אם הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אזי $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$, ובפרט מתכנס.
42. אם $\sum(a_n - b_n)$ מתכנס, אז הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
43. אם $c \neq 0$, אז: $\sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n$, אם אחד מהסכומים קיים.
44. אם $\sum a_n = \pm\infty$, $c > 0$, אז $\sum c \cdot a_n = \pm\infty$, ואם $c < 0$, אז $\sum c \cdot a_n = \mp\infty$.
45. <u>מבחן השורש / קושי להתכנסות טורים :</u> יהי $\sum a_n$ טור חיובי, אזי :

א) אם יש $0 < q < 1$ כך ש $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, מלבד מספר סופי של איברים, אז $\sum a_n < \infty$.

ב) אם יש אינסוף n-ים כך ש $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, אז $\sum a_n = \infty$.

נכתב על ידי נועם יערי

46. <u>מבחן המנה להתכנסות טורים:</u> יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם יש $0<q<1$ כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$ פרט למספר סופי של איברים אז הטור מתכנס.
47. עבור טורים חיוביים $\sum a_n\ \sum b_n$. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ לבסוף אז:

    א) אם $\sum b_n<\infty$ אז $\sum a_n<\infty$.

    ב) אם $\sum a_n=\infty$ אז $\sum b_n=\infty$.
48. אם $\sum a_n$ טור חיובי המקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to c<1$ אז $\sum a_n<\infty$ ואם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to c>1$, $\sum a_n=\infty$.
49. עבור סדרה חיובית a_n, אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$ לבסוף, אז $a_n<a_{n+1}$ לבסוף, כלומר הסדרה היא סדרה חיובית עולה, ולכן $a_n\nrightarrow 0$.
50. לכל $a>0$: $\sqrt[n]{a}\to_{n\to\infty}1$
51. אם מתקיים התנאי של מבחן המנה אז מתקיים התנאי של מבחן השורש.
52. תהי (a_n) סידרה מונוטונית. אם קיימת תת סדרה (a_{m_n}) כך ש - $a_{m_n}\to a$ במובן הרחב, אז $a_n\to a$.
53. <u>חוק הקיבוץ:</u> הכנסת סוגריים בטור מתכנס במובן הרחב אינה משנה את סכומו. כלומר: אם $\sum a_n$ מתכנס, אז לכל סדרה $1=m_1<m_2<m_3<\cdots$ מתקיים:

    $$\sum(a_{m_k}+a_{m_k+1}+\cdots+a_{m_{k+1}-1})=\sum a_n.$$
54. <u>מבחן העיבוי:</u> אם הסדרה a_n חיובית <u>ויורדת</u>, אז הטורים $\sum a_n,\sum 2^n\cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
55. $\sqrt[n]{n}\to 1$
56. אם α ממשי, ו $a_n\to a$ (ו-a^α, a_n^α מוגדרים) אז $a_n^\alpha\to a^\alpha$.
57. <u>משפט לייבניץ:</u> אם (a_n) יורדת לאפס, אזי:

    א) הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

    ב) שאריות הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מקיימות $|r_m|\le a_{m+1}$ וסימנן, $(-1)^m$.

    (אם במשפט הסדרה (a_n) יורדת ממש, בסעיף ב' נקבל $|r_m|<a_{m+1}$)
58. אם טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.
59. <u>מבחן דיריכלה:</u> יהיו $\sum b_n$ טור חסום, $a_n\to 0$ מונוטונית. אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.
60. מספיק להוכיח כשהסדרה a_n יורדת ל-0. (אם $a_n\nearrow 0$ אז $-a_n\searrow 0$ ואז $\sum(-a_n)b_n=-\sum a_nb_n$)
61. <u>מבחן אבל:</u> אם (a_n)מונוטונית וחסומה, ו-$\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_nb_n$ מתכנס ולכן חסום.
62. $\sum b_n$ מתכנס, ולכן חסום.
63. לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים:

א. $0 \le p_n, q_n \le |a_n|$.

ב. $p_n + q_n = |a_n|$.

ג. $p_n - q_n = a_n$.

64. $\sum a_n$ מתכנס בהחלט $\Leftrightarrow \sum p_n, \sum q_n < \infty$. במקרה זה מתקיים: $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$.

65. אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum p_n = \sum q_n = \infty$.

66. אם טור אי שלילי $\sum a_n$ מתכנס, אז לאותו סכום יתכנס הטור גם לאחר שינוי כרצוננו של סדר איבריו. כלומר: לכל תמורה P על $\mathbb{N}$ (=פונקציה חח״ע ועל $P: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

67. <u>חוק החילוף:</u> אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז שינוי סדר איבריו לא משנה את סכומו.

68. יהי $\sum a_n$ טור. נניח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{m_k} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}\right)$ (המתקבל מטורנו ע״י הכנסת סוגריים) מתכנס, והסימן של $a_{m_k}, \cdots, a_{m_{k+1}-1}$ זהה לכל k. אזי הסרת הסוגריים אינה משנה את סכום הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{m_k} + \cdots + a_{m_{k+1}-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_n)$.

69. אם $a_n \to a$ אז לכל סדרה $k_n \to \infty$ כש $k_n \in \mathbb{N}$ (לא בהכרח עולה) מתקיים $a_{k_n} \to a$.

70. <u>משפט רימן:</u> יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי:

א. לכל $-\infty \le s \le \infty$, יש סידור מחדש של אברי הטור כך שסכומו יהיה s.

ב. יש גם סידור כך שהטור אינו מתכנס אפילו במובן הרחב.

71. אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אז

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j\right) = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

72. אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים בהחלט, אז הטור בסעיף 70 מתכנס בהחלט.

73. כשהטורים מתכנסים בהחלט, לא משנה סדר סכימת המכפלות, בפרט,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i} = \left(\sum a_n\right)\cdot\left(\sum b_n\right)$$

74. <u>ניסוח הגבול על ידי היינה:</u> $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$ ולכל סדרה $\overbrace{a_n}^{\in dom(f)} \to a$ מתקיים $a \ne$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

75. אם $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אז הוא יחיד.

76. הסיבות האפשריות לאי קיום גבול $\lim_{x\to a} f(x)$ (כאשר a נקודת הצטברות של $dom(f)$):

יש בתחום סדרה $a \ne a_n \to a$ כך שהגבול $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ אינו קיים.

יש בתחום סדרות $a \ne a_n, a_n' \to a$ כך שהגבולות $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \ne \lim_{n\to\infty}(a_n')$.

נכתב על ידי נועם יערי

77. $\lim_{x\to a^+} f(x)=b$ $\Leftrightarrow$ a נקודת הצטברות מימין של התחום, ולכל סידרה $a<a_n\to a$ (יורדת ממש) $f(a_n)=b$. בדומה עבור $\lim_{x\to a^-} f(x)=b$.
78. עבור $a\in\mathbb{R}$: $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$ (קיימים ושווים). במקרה זה, כל הגבולות שווים.
79. מוסכמה: נקודות a בהן מחשבים את גבולות $\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ הן נקודות הצטברות של תחום הפונקציה.
80. $\lim_{x\to a} c=c$
81. אם $\lim_{x\to a} f(x)=b, \lim_{x\to a} g(x)=c$ אזי:
    א. $\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=b\pm c$
    ב. $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=b\cdot c$
    ג. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{b}{c}$
    כאשר הביטויים מימין מוגדרים היטב. (למשל: $c\neq 0$ בסעיף 3).
82. סנדוויץ': אם $b \overset{x\to a}{\leftarrow} f(x)\le g(x)\le h(x) \overset{x\to a}{\rightarrow} b$ אזי $\lim_{x\to a} g(x)=b$.
83. אם $b \overset{x\to a}{\leftarrow} f(x)$, $b\neq f(x)$, $g(x) \overset{x\to b}{\rightarrow} c$ (b נקודת הצטברות של $dom(g)\cap im(f)$) אז $g\left(f(x)\right) \overset{x\to a}{\rightarrow} c$.
84. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$
85. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a. אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אז יש סביבה של a שבה הפונקציה f חסומה.
86. כל אחד מהתנאים הבאים שקול לרציפות f בנקודה a:
    א. לכל $0<\varepsilon$. קיים $0<\delta$, כך ש: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ לכל x (בתחום) כך ש - $|x-a|<\delta$ (לא צריך להחריג את $x=a$).
    ב. $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$.
    ג. לכל סידרה $a_n\to a$, מתקיים: $f(a_n)\to f(a)$. (לא נדרש ש - $a_n\neq a$ לכל n).
87. כל פולינום הוא פונקציה רציפה בכל נקודה (רעיון: כל פולינום מתקבל מהפונקציות הרציפות x וקבועות, ע"י כפל וחיבור).
88. כל פונקציה רציונאלית (מנה של פולינומים, $\frac{f(x)}{g(x)}$) היא רציפה בכל נקודה a בה $g(a)\neq 0$.
89. אם $f(x)$ רציפה בנקודה a ו - $g(x)$ רציפה בנקודה $b=f(a)$. אז $g\left(f(x)\right)$ רציפה ב - a.
90. אפשרויות לאי רציפות בנקודה – ראה הרצאה 18.

91. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה a. אם f רציפה בנקודה a ו - $0 < f(a)$, אז קיימת סביבה של a שבה $0 < f(x)$ (ובדומה עבור $f(a) < 0$).
92. f רציפה בנקודה a $\Leftrightarrow$ f רציפה מימין ומשמאל בנקודה a.
93. f רציפה בקטע $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ הפונקציה מצומצמת $f|_{[a,b]}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה בקטע $[a,b]$.
94. <u>משפט ערך הביניים:</u> אם f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ו - $f(a) < d < f(b)$, אזי קיים $a < c_1 < b$ כך ש - $f(c_1) = d$.
(הערה: משפט ערך הביניים נכון גם כאשר $f(b) < d < f(a)$: נפעיל את המשפט הקודם על הפונקציה $-f$:
$-f(a) < -d < -f(b)$; $-f$ רציפה בקטע $[a,b]$, לכן יש נקודה $a < c < b$ כך ש - $-f(c) = -d$ ולכן $f(c) = d$.)
95. אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ומחליפה סימן שם (כלומר, $f(a) < 0 < f(b)$ או $f(a) > 0 > f(b)$) אז f מקבלת את הערך 0 בנקודה כלשהי בקטע.
96. לכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש (ממשי).
97. <u>למת ויירשטרס:</u> פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, חסומה באותו קטע סגור $[a,b]$.
98. <u>משפט ויירשטרס:</u> פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.
99. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אזי
$$\{f(x): a \le x \le b\} = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$ קטע סגור.
100. אם f רציפה במידה שווה בתחום A, אזי לכל $a \in A$, כך שקיימת סביבה של a המוכלת ב - A, f רציפה בנקודה a.
101. <u>משפט קנטור:</u> פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה במידה שווה שם.
102. פונקציה רציפה ומחזורית ב - $\mathbb{R}$, רציפה במידה שווה ב - $\mathbb{R}$.
(f מחזורית אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש - $f(x+c) = f(x)$ לכל x. דוגמה: $sin(x)$ מחזורית. בפרט, $sin(x)$ רציפה במידה שווה ב - $\mathbb{R}$)
103. פונקציה עולה ממש היא פונקציה חד - חד ערכית.
104. הפונקציה ההפוכה לפונקציה עולה ממש היא פונקציה עולה ממש.
105. אם f עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי $Img(f) = [f(a), f(b)]$, ואז f^{-1} מוגדרת על קטע סגור.
106. אם f עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f^{-1} עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[f(a), f(b)]$.
107. הפונקציה $f(x) = e^x$ מוגדרת לכל $0 < x$.
108. e^x עולה ממש.

109. f גזירה ב x – $\Leftrightarrow$ $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ שווים וקיימים.

110. אם f גזירה בנקודה a, אז f רציפה בנקודה a.

111. $(u+v)' = u' + v'$

112. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

113. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

114. אם $v \neq 0$ (לפחות בסביבה של x), אז: $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

115. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

116. אם f הפיכה בסביבת a ו - $f'(a)$ קיימת ושונה מאפס ו - f^{-1} רציפה ב - $b := f(a)$ אז $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ (מסמנים: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$)

117. <u>כלל השרשרת:</u> $\left(g\left(f(x)\right)\right)' = g'\left(f(x)\right) \cdot \overbrace{f'(x)}^{\text{הנגזרת הפנימית}}$

118. <u>משפט פרמה:</u> תהי c נקודת אקסטרמום של f בקטע פתוח. אם $f'(c)$ קיימת, אז $f'(c) = 0$.

119. <u>משפט רול:</u> תהי f רציפה ב -$[a,b]$ וגזירה ב - (a,b). אם $f(a) = f(b)$, אז יש $a <$ $c < b$ כך ש – $f'(c) = 0$.

120. <u>משפט הערך הממוצע (לגרנזי):</u> תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). יש $a < c < b$ כך ש - $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

121. <u>משפט הערך הממוצע המוכלל (קושי):</u> אם f, g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות ב – (a,b) כך ש – $g'(x) \neq 0$ שם, אז יש $a < c < b$ כך ש – $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

122. <u>משפט דרבו:</u> אם f גזירה ב - $[a,b]$, אז f' מקבלת כל ערך בין $f'_+(a)$ ל - $f'_-(b)$.

123. תהי f רציפה בסביבה של a וגזירה בסביבה המנוקבת של a. אזי:
   א. אם $f'(x) \to_{x\to a} b$, אז $f'(a) = b$.
   ב. כנ"ל עבור $f'_+(a)$, $f'_-(a)$.

124. אם f גזירה בקטע סגור אז נקודות אי הרציפות של f' (אם יש כאלה) הן תמיד מסוג שני (אחד הגבולות החד צדדיים לא קיים).

125. <u>משפט לופיטל</u>: יהי $\lambda \in \{0, \infty\}$, $a \in \mathbb{R} \cup \infty$.. יהיו פונקציות f, g גזירות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות שם:
   א. $g'(x) \neq 0$ לכל
   ב. $f(x). g(x) \overset{x\to a}{\to} \lambda$
   ג. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x\to a}{\to} b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

אזי: $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\to} b$.

הערה: לופיטל נכון גם עבור גבולות חד-צדדיים.

■