

תרגיל 3 - חשבון אינפי 3 תש"פ

תרגיל 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ סגורות, אזי $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ סגורה. (רמז: כדאי להשתמש באחד מהקריטריונים שלמדנו לסגירות של קבוצות).
2. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחות, אזי $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ פתוחה. (רמז: ניתן גם ישירות, אבל אפשר להשתמש גם בסעיף הקודם).
3. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ קומפקטיות, אזי $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ קומפקטית.
4. אם $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ו $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית, אזי $[a, b] \times X = \{tx | t \in [a, b], x \in X\}$ היא קבוצה קומפקטית.
5. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ו $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה, אזי $X \cap Y$ קומפקטית.
6. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ו $X \neq \emptyset$, לכל $x \in X$, $x \in X \setminus \{x\}$ אינה קומפקטית.
7. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $x \in X$ היא נקודה מובדדת, אזי x היא נקודת הצטברות של X^c .
8. אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ו X אינה פתוחה ואינה סגורה, אזי $X^\circ \subsetneq \bar{X}$.
9. תהי A קבוצה, ויהי A' אוסף נקודת הצטברות שלה. הוכיחו או הפריכו $(A')' = A'$.

תרגיל 2. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו אם היא פתוחה, סגורה, קומפקטית (ייתכן שאף אחד מאלה לא מתקיים). נמקו את תשובתכם.

1. $A = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a, n \in \mathbb{N}, a < 2^n \right\}$
2. $A = (0, 1) \times [0, 1]$
3. $A = \{(x, y, z) \mid e^{xy} + z^2 \leq 2\}$
4. $A = \{(x, y) \mid x + y^3 > 0, x > 0, y < 0\}$
5. $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \neq \frac{1}{4}\}$
6. $A = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B(0, 1) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \|x\| \neq \frac{1}{n}\}$

תרגיל 3. תהי $X \subseteq \mathbb{R}$, ו $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. נגדיר את הגרף של f על ידי

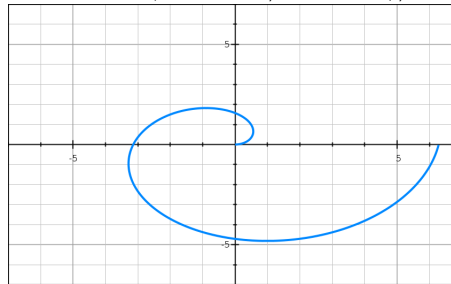
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

ענו על השאלות הבאות:

1. הוכיחו/הפריכו: אם $X \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה, ו $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אזי Γ_f היא קבוצה סגורה.
2. הוכיחו/הפריכו: אם $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, Γ_f היא קבוצה סגורה.
3. נגדיר $S = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x}, x > 0\}$. הראו, שקיימת $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש $S = \Gamma_f$. האם S סגורה?
4. הוכיחו/הפריכו: אם $S \subseteq \mathbb{R}^2$ היא קבוצה סגורה, אזי ההיטל של S על ציר ה X , המוגדר על ידי $\{x \mid (x, y) \in S\} \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה.
5. הוכיחו/הפריכו: אם $X \subseteq \mathbb{R}$ ו $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אזי $(\Gamma_f)^\circ = \emptyset$ (הפנים של Γ_f היא קבוצה ריקה).

תרגיל 4. מצאו את הסגור \bar{A} , הפנים A° , והשפה ∂A של A בכל אחד מהמקרים הבאים.

1. תיבה פתוחה n -מימדית ב \mathbb{R}^n המוגדרת על ידי: $A = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$.
2. תיבה סגורה n -מימדית המוגדרת על ידי \mathbb{R}^n על ידי: $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.
3. $A = B(0, 1) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = 0 \wedge y = 0\})$.
4. $A = \{(t \cos t, t \sin t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ (הדרכה, השתמשו ברציפות ובקומפקטיות, כמו כן, תנסו להבין מדוע העקום באיור המצורף הוא שווה ל A).



5. $A = \{r(t \cos t, t \sin t) \mid 0 \leq r \leq t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ (הדרכה: השתמשו באחד מהסעיפים שהוכחתם בשאלה 1 בתריל הנוכחי).