

## תרגיל 3 - מתמטיקה לכימאים ג' תש"פ

**תרגיל 1.** מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות בעזרת הצבה מסוג  $v = (ax + by + c)$

$$1. y' = \tan^2(x + y + 1)$$

$$2. y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

**תרגיל 2.** מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות ההצבות מסוג  $\hat{x} = (x + \alpha)$ ,  $\hat{y} = (y + \beta)$  ו  $v = \frac{y}{x}$ . ייתכן שיש צורך להעביר את המשוואה לצורה נורמלית לפני.

$$1. (2x + y - 3) dx + (x + y - 1) dy = 0$$

$$2. y' - \frac{y}{x} = x$$

$$3. (2x + y - 3) + (x + y - 1) y' = 0$$

$$4. \frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} y' = 0$$

**תזכורת:** צורות רישים  $A(x, y) + B(x, y) y' = 0$  ו  $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$  הן שקולות. (אפשר לכתוב בשתי הדרכים, הכוונה היא לאותו הדבר). המשוואה  $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$  נקראת מדויקת אם:

$$A(x, y)_y = B(x, y)_x$$

במקרה הזה מוציאים פתרון כללי  $F(x, y) = c$ , כאשר מוציאים את  $F$  בעזרת חישוב האינטגרלים

$$F(x, y) = \int A(x) dx = G(x, y) + h(y)$$

ו

$$h(y) = \int (B(x, y) - G_y(x, y)) dy$$

הפונקציה  $\mu(x, y)$  היא גורם אינטגרציה למשוואה  $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$  אם מתקיים

$$(\mu(x, y) A(x, y))_y = (\mu(x, y) B(x, y))_x$$

או במילים אחרות המשוואה  $\mu(x, y) A(x, y) dx + \mu(x, y) B(x, y) dy = 0$  היא משוואה מדויקת.

1. קיים גורם אינטגרציה  $\mu(x)$  שתלוי ב  $x$  בלבד אם הפונקציה  $\frac{A(x,y)_y - B(x,y)_x}{B(x,y)}$  תלוייה ב  $x$  בלבד. במקרה הזה מתקיים:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{A(x,y)_y - B(x,y)_x}{B(x,y)}$$

2. קיים גורם אינטגרציה  $\mu(y)$  שתלוי ב  $y$  בלבד אם  $\frac{B(x,y)_x - A(x,y)_y}{A(x,y)}$  תלוייה ב  $y$  בלבד. במקרה הזה מתקיים:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{B(x,y)_x - A(x,y)_y}{A(x,y)}$$

3. אם לא קיים גורם אינטגרציה  $\mu$  שתלוי ב  $x$  או  $y$  בלבד, אז לעיתים ניתן לנסות להציב  $\mu(x,y) = x^m y^n$  ולמצוא  $m$  ו  $n$  על ידי פתרון המשוואה:

$$(x^m y^n A(x,y))_y = (x^m y^n B(x,y))_x$$

**תרגיל 3.** פתרו את המשוואות הבאות. (הדרכה: הראו שהן מדויקות, או שמצאו גורם אינטגרציה).

1.  $(2x + 3) dx + (2y - 2) dy = 0$

2.  $(3x^2 - 2xy + 2) dx + (6y^2 - x^2 + 3) dy = 0$

3.  $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$

4.  $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x) y' = 0$

5.  $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$

6.  $y(1 + xy) dx - x dy = 0$

7.  $(x^2 y - 1) dx + (x^3 + x^2 \cos y) dy = 0$

8.  $x(y^4 - x^2) dy + y(y^4 + x^2) dx = 0$

**תרגיל 4.** מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות.

1.  $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x) y' = 0$

2.  $y' = (x + y) [1 + \ln(x + y) - 1]$

3.  $x^2 y^3 + (x + xy^2) y' = 0$

4.  $x^2 y' = y(x + y)$