

תרגיל 3 - מתמטיקה לכימאים ג' תש"פ (עם תיקונים)

תרגיל 1. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות בעזרת הצבה מסוג $v = (ax + by + c)$

$$1. y' = \tan^2(x + y + 1)$$

$$2. y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

תרגיל 2. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות ההצבות מסוג $\hat{x} = (x + \alpha)$, $\hat{y} = (y + \beta)$ ו $v = \frac{y}{x}$. ייתכן שיש צורך להעביר את המשוואה לצורה נורמלית לפני.

$$1. (2x + y - 3) dx + (x + y - 1) dy = 0$$

$$2. y' - \frac{y}{x} = x$$

$$3. (2x + y - 3) + (x + y - 1) y' = 0$$

$$4. \frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} y' = 0$$

$$5. y' = -\frac{ax + by}{bx + cy}$$

$$6. (xy^4 - x) dx + (y + yx) dy = 0$$

תזכורת: צורות רישים $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$ ו $A(x, y) + B(x, y) y' = 0$ שקולות. (אפשר לכתוב בשתי הדרכים, הכוונה היא לאותו הדבר). המשוואה $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$ נקראת מדויקת אם:

$$A(x, y)_y = B(x, y)_x$$

במקרה הזה מוציאים פתרון כללי $F(x, y) = c$, כאשר מוציאים את F בעזרת חישוב האינטגרלים

$$F(x, y) = \int A(x) dx = G(x, y) + h(y)$$

1

$$h(y) = \int (B(x, y) - G_y(x, y)) dy$$

הפונקציה $\mu(x, y)$ היא גורם אינטגרציה למשוואה $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$ אם מתקיים

$$(\mu(x, y) A(x, y))_y = (\mu(x, y) B(x, y))_x$$

או במילים אחרות המשוואה $\mu(x, y) A(x, y) dx + \mu(x, y) B(x, y) dy = 0$ משוואה מדויקת.

1. קיים גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שתלוי ב x בלבד אם הפונקציה $\frac{A(x,y)_y - B(x,y)_x}{B(x,y)}$ תלוייה ב x בלבד. במקרה הזה מתקיים:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{A(x,y)_y - B(x,y)_x}{B(x,y)}$$

2. קיים גורם אינטגרציה $\mu(y)$ שתלוי ב y בלבד אם $\frac{B(x,y)_x - A(x,y)_y}{A(x,y)}$ תלוייה ב y בלבד. במקרה הזה מתקיים:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{B(x,y)_x - A(x,y)_y}{A(x,y)}$$

3. אם לא קיים גורם אינטגרציה μ שתלוי ב x או y בלבד, אז לעיתים ניתן לנסות להציב $\mu(x,y) = x^m y^n$ ולמצוא m ו n על ידי פתרון המשוואה:

$$(x^m y^n A(x,y))_y = (x^m y^n B(x,y))_x$$

תרגיל 3. פתרו את המשוואות הבאות. (הדרכה: הראו שהן מדוייקות, או שמצאו גורם אינטגרציה).

1. $(2x + 3) dx + (2y - 2) dy = 0$

2. $(3x^2 - 2xy + 2) dx + (6y^2 - x^2 + 3) dy = 0$

3. $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x) y' = 0$

4. $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$

5. $y(1 + xy) dx - x dy = 0$

6. $(x^2 y - 1) dx + (x^3 + x^2 \cos y) dy = 0$

תרגיל 4. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות.

1. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x) y' = 0$

2. $y' = (x + y) [1 + \ln(x + y) - 1]$

3. $x^2 y^3 + (x + xy^2) y' = 0$

4. $x^2 y' = y(x + y)$