

# תרגיל בית 5 מבוא לתורת החבורות

## 88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות: בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך יח' כסלו ה'תשע"ז, 18.12.2016.

### שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

**שאלה 1.** תהי  $G$  חבורה ו  $H, K$  תת-חבורות שלה. נסחו את ההנחות הבאות ע"י משפטים לוגיים (עם  $\exists$  ו  $\forall$ ) מהצורה  $ab = cd$  בלבד.

1.  $G$  אבלית.

2.  $N$  אבלית.

3.  $N$  נורמלית ב  $G$ .

4.  $NH = HN$ .

**שאלה 2.** עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה, ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. מחלקה שמאלית היא ת"ח.

2. עבור חבורה ציקלית כל ת"ח היא נורמלית.

3. אם  $N$  נורמלית ב  $G$  אז  $GN = NG$ .

4. אם עבור ת"ח  $N \leq G$  מתקיים  $GN = NG$  אז  $N$  נורמלית.

5. אם ת"ח  $H$  היא אבלית אז היא נורמלית.

6. אם ת"ח  $H$  היא נורמלית אז היא אבלית.

**שאלה 3.** חשבו את הסימן של התמורות הבאות וקבעו אם הן זוגיות או אי-זוגיות:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$$

**שאלה 4.** תהי  $H \leq G$  ת"ח. נגדיר יחס  $g \sim g'$  אם  $g = g'h$  עם  $h \in H$ . הוכיחו כי זהו יחס שקילות. הראו שמחלקות השקילות הן המחלקות  $[g] = gH$  וקבוצת המנה היא  $G/H$ .

## שאלות להגשה

**שאלה 5.** תארו את הקוסטים השמאליים עבור תת-החבורות הבאות:

1.  $\langle 4 \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ .

2.  $\langle (123) \rangle \leq S_3$ .

3. עבור  $G = \langle a \rangle$  מסדר 15:  $\langle a^5 \rangle \leq G$ .

**שאלה 6.** הוכיחו כי  $\langle (1, 1) \rangle \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  הוא תת-חבורה מאינדקס אינסופי.

**שאלה 7.** המרכז (center) של חבורה  $G$  היא הקבוצה

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G \quad gx = xg\}$$

1. הוכיחו כי  $Z(G)$  הוא ת"ח של  $G$ .

2. הוכיחו כי  $Z(G)$  הוא ת"ח נורמלית ב- $G$ .

3. הוכיחו כי אם  $N \triangleleft G$  אזי  $Z(N) = \{x \in N \mid \forall y \in N \quad xy = yx\}$  היא תת-חבורה נורמלית של  $G$ .

שימו לב: אתם יודעים שהמרכז של חבורה הוא תת-חבורה נורמלית ולכן ברור ש  $Z(N) \triangleleft N$ . אבל אנחנו שאלנו אם זה נורמלי ב- $G$ !

**שאלה 8.** יהיו  $H, K \leq G$  תת-חבורות כך ש  $(|H|, |K|) = 1$  הוכיחו כי  $H \cap K = \{e\}$ .

**שאלה 9.** מצאו את שתי הספרות האחרונות של  $2304^{199} + 8074$ .

**שאלה 10.** תהי  $G$  חבורה ו  $H \leq G$  תת-חבורה. נגדיר את הליבה של  $H$  ב- $G$  להיות:

$$\text{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

1. הראו כי  $\text{Core}(H) \subseteq H$ .

2. הוכיחו כי לכל  $g \in G$ , היא ת"ח של  $G$ . הסיקו כי  $\text{Core}(H)$  היא ת"ח של  $G$ .

3. הוכיחו כי  $\text{Core}(H)$  נורמלית ב- $G$ .

## שאלות אתגר

את שאלות האתגר אין חובה לפתור, אך מומלץ לפחות לקרוא. אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 11.** הוכיחו כי אין פתרון למשוואה  $x^3 \equiv 2 \pmod{151}$ .

**שאלה 12.** 1. הוכיחו כי חבורה היא לא איחוד של שתי תת-חבורות אמיתיות. כלומר  
שם  $G = H_1 \cup H_2$  או  $H_1 = G$  או  $H_2 = G$ .

2. תהא  $G$  חבורה שהיא איחוד של שלוש תת-חבורות אמיתיות, כלומר:

$$G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

- (א) תנו דוגמא לחבורה כזאת (רמז: חבורה מסדר 4).
- (ב) הוכיחו כי חיתוך של כל שתי תת-חבורות שווה לחיתוך שלושתן  $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ .
- (ג) הוכיחו כי לכל  $x \in G$  מתקיים  $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$ .
- (ד) הסק שהחיתוך הוא ת"ח נורמלית ב- $G$ .
- (ה) הראה שהאינדקס של החיתוך ב- $G$  הוא 4.

בהצלחה!