חסמים

למה

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים, קיים חסם תחתון.

הוכחה

תהי $\mathbb{R} \supseteq A \neq \emptyset$ וחסומה מלרע.

נגדיר:

$$B \quad := \quad \{-a \mid a \in A\}$$

נוכיח כי B לא ריקה.

$$A \quad \neq \quad \emptyset$$

לכן, קיים:

$$a \quad \in \quad A$$

לכן, קיים:

$$-a \quad \in \quad B$$

לכן:

$$B \quad \neq \quad \emptyset$$

נוכיח כי B חסומה מלעיל.

A חסומה מלרע, לכן יהי $c \leq A$.

נוכיח כי $B \leq -c$.

יהי $-a \in B$.

c חסם מלרע, לכן:

$$c \quad \leq \quad a$$

לכן:

$$-a \quad \leq \quad -c$$

לכן:

$$B \leq -c$$

לכן, B חסומה מלעיל.

B אינה ריקה וחסומה מלעיל, לכן עפ"י אקסיומת החסם העליון, $s := sup(B)$ קיים.

נוכיח כי $-s = inf(A)$.

s חסם עליון, לכן:

$$B \leq s$$

באופן דומה להוכחה הקודמת:

$$-s \leq A$$

יהי $c \leq A$.

נוכיח כי: $c \leq -s$.

באופן דומה להוכחה הקודמת:

$$B \leq -c$$

s חסם עליון, לכן:

$$s \leq -c$$

לכן:

$$c \leq -s$$

לכן:

$$-s = inf(A)$$

■

משפט (תכונת ארכימדס)

לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$x < n \cdot \varepsilon$$

הוכחה

נניח בשלילה כי קיימים $0 < \varepsilon$ ו - $x \in \mathbb{R}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$n \cdot \varepsilon \quad \leq \quad x$$

לכן:

$$\emptyset \quad \neq \quad \{n \cdot \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \leq \quad x$$

עפ"י אקסיומת החסם העליון, $s \coloneqq sup(\{n \cdot \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\})$ קיים.

$s - \varepsilon < s$, לכן עפ"י משפט, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$s - \varepsilon \quad < \quad n \cdot \varepsilon$$

לכן:

$$s \quad < \quad (n+1) \cdot \varepsilon$$

לכן, s אינו חסם מלעיל (עליון) של הקבוצה: $\{n \cdot \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$.

סתירה.

לכן, לכל $0 < \varepsilon$ ולכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$x \quad < \quad n \cdot \varepsilon$$

$$\blacksquare$$

למה

לכל קבוצה $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל, קיים מקסימום.

הוכחה

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s \coloneqq sup(A)$ קיים.

$s - 1 < s$, לכן קיים $n \in A$ כך ש:

$$s - 1 \quad < \quad n$$

לכן, לכל $n < m \in \mathbb{Z}$:

$$s \quad < \quad n + 1 \quad \leq \quad m$$

לכן:

$$m \quad \notin \quad A$$

לכן:

$$n \quad = \quad max(A)$$

$$\blacksquare$$

משפט (צפיפות $\mathbb{Q}$ ב - $\mathbb{R}$)

בין כל שני מספרים ממשיים (שונים), קיים מספר רציונאלי.

הוכחה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כך ש: $a < b$.

$0 < b - a$, לכן עפ"י תכונת ארכימדס, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$1 \quad < \quad n \cdot (b - a)$$

הקבוצה $\emptyset \neq \{m \in \mathbb{Z} \mid m < n \cdot b\} \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל (למשל ע"י $n \cdot b$), לכן עפ"י משפט, קיים $k \coloneqq max\{m \in \mathbb{Z} \mid m < n \cdot b\}$.

אם $k \leq n \cdot a$, אז:

$$k + 1 \quad \leq \quad n \cdot a + 1 \quad < \quad n \cdot b$$

בסתירה למקסימליות k.

לכן: $n \cdot a < k$, ז"א:

$$n \cdot a \quad < \quad k \quad < \quad n \cdot b$$

לכן:

$$a \quad < \quad \overset{\in \mathbb{Q}}{\frac{k}{n}} \quad < \quad b$$

$$\blacksquare$$

למה

$$\sqrt{2} \quad \notin \quad \mathbb{Q}$$

הוכחה

נניח בשלילה כי:

$$\sqrt{2} \quad \in \quad \mathbb{Q}$$

לכן, קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$\frac{m}{n} \quad = \quad \sqrt{2}$$

לכן:

$$m^2 \quad = \quad 2n^2$$

לכן, m זוגי.

$$2 \quad | \quad m$$

$$\Downarrow$$

$$4 \quad | \quad m^2$$

$$\Downarrow$$

$$4 \quad | \quad 2n^2$$

$$\Downarrow$$

$$2 \quad | \quad n^2$$

$$\Downarrow$$

$$2 \quad | \quad n$$

לכן, n זוגי.

אם נתחיל משבר מצומצם m/n, נקבל סתירה.

לכן:

$$\sqrt{2} \quad \notin \quad \mathbb{Q}$$

$$\blacksquare$$

הערה

השדה הסדור $\mathbb{Q}$ אינו מקיים את תכונת החסם העליון.

הוכחה

נגדיר:

$$A \quad \coloneqq \quad \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$$

כלומר:

$$A \quad = \quad \left\{q \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{2} < q < \sqrt{2}\right\}$$

נניח בשלילה כי קיים:

$$\mathbb{Q} \quad \ni \quad r \quad \coloneqq \quad sup(A)$$

$A \le \sqrt{2}$, לכן:

$$\overset{\in\mathbb{Q}}{r} \quad \le \quad \overset{\notin\mathbb{Q}}{\sqrt{2}}$$

לכן:

$$r \quad < \quad \sqrt{2}$$

עפ"י צפיפות $\mathbb{Q}$ ב - $\mathbb{R}$, קיים:

$$r \quad < \quad \overset{\in\mathbb{Q}}{r'} \quad < \quad \sqrt{2}$$

לכן:

$$r'^2 \quad < \quad 2$$

לכן:

$$r' \quad \in \quad A$$

לכן:

$$sup(A) \quad = \quad r \quad < \quad r' \quad \in \quad A$$

סתירה.

לכן, לא קיים חסם עליון ל $-A$.

■

סדרות

הגדרה

ערך מוחלט של מספר ממשי מוגדר ע"י:

$$|x| \quad := \quad \begin{cases} x\,, & 0 \le x \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

למה

1. לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x \cdot y| \quad = \quad |x| \cdot |y|$$

2. <u>אי שוויון המשולש</u>: לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x| - |y|\big| \quad \le \quad |x \pm y| \quad \le \quad |x| + |y|$$

הוכחה

חלוקה ל – 4 מקרים:

1. $0 \le x$ ו- $0 \le y$.

2. $0 \le x$ ו- $y < 0$.

3. $x < 0$ ו- $0 \le y$.

4. $x < 0$ ו- $y < 0$.

■

הגדרה

סדרה היא התאמה של מספר ממשי a_n לכל מספר טבעי n.

כלומר, סדרה היא פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ומסמנים $a_n := f(n)$.

הסדרה:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

מסומנת:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

ולעתים:

$$(a_n)$$

דוגמה

סדרה	איברים ראשונים
$a_n := \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$
$a_n := (-1)^n$	$-1,1,-1 \dots$
$a_n :=$ הספרה ה $-$ n העשרוני בפיתוח של π	$3,1,4, \dots$

הגדרה

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת/שואפת לגבול** a, אם לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

נסמן:

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

דוגמה

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

יהי $0 < \varepsilon$.

נמצא $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

ניקח:

$$\frac{1}{\varepsilon} < N \in \mathbb{N}$$

לכל $N \leq n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

לכן:

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\blacksquare$$