

מרצה: דר' ארז שיינר
משך המבחן: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'
ענו על כל השאלות
כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(7x)}$.ב. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x \cdot \arctan(x))$.ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n)}$

2.

א. חשבו את $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x} dx$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x + \sin(x) = e^{-x}$

ב. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = e^x + e^{-x} - \cos(x)$

4. תהי פונקציה f עבורה $2f(x)f'(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$

א. הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq 0$

ב. הוכיחו שאם $f(0) = 0$ אזי לכל $x < 0$ מתקיים כי $f(x) = 0$

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - 1$, ותנאי ההתחלה $1 < a_1$

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + kn + k^2}$

ב. הוכיחו כי השגיאה h בקירוב של $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ על ידי פולינום מקלורן של הפונקציה $f(x) = \cos(x)$

מסדר 2 מקיימת כי $|h| \leq \frac{1}{12}$ (ללא שימוש במחשבון, כמובן).