חוברת תרגולים - גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

אלעד עטייא

13 באפריל 2016

1 סכימת איינשטיין

סכימת איינשטיין היא דרך סימון מקוצרת לסכומים.

בקצרה, נרצה להשמיט את ה־Σ מהסכום, ולכתוב אותו ללא סימן ה־Σ.

לפני שנסביר איך עושים זאת, נחליט על מספר סימונים:

1. קואורדינטות של וקטורים נסמן עם אינדקס עליון, למשל עבור $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \left(v^1, v^2, v^3\right)$$

2. כאשר נרצה לסמן איברים שונים בקבוצה, נשאיר את האינדקס למטה, כמו בסימון המוכר לנו. למשל, הקבוצה:

$$\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$$

היא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

3. בסימון המוכר שלנו, מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ סומנה ב־ $(A)_{ij}$ או ב־ $(a)_{ij}$, ואיבר בודד סומן ב־A_{ij} או ב־a_{ij}.

אנו נסמן איבר במטריצה ב־ ${A^i}_j$ או ב־ ${a^i}_j$, כאשר i הוא אינדקס השורה ו־j אינדקס העמודה.

אם כן, סכימת איינשטיין אומרת שאם אינדקס מופיע גם למעלה וגם למטה, יש לסכום על כל הערכים של אינדקס זה.

<u>לדוגמה:</u>

1. אם $\{e_1, e_2, e_3\}$ היא הבסיס הסטדנרטי של $\mathbb{R}^3$, כל וקטור $v = \left(v^1, v^2, v^3\right)$ אפשר להציג כך:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i$$

ולפי סכימת איינשטיין נרשום:

$$v = v^i e_i$$

2. נתבונן במערכת משוואות ליניאריות:

$$Ax = b$$

כאשר $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ ו־$x \in \mathbb{R}^n$. נרצה להביע זאת באמצעות סכימת איינשטיין. נכתוב זאת במפורש:

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^i{}_1 & A^i{}_2 & \cdots & A^i{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m{}_1 & A^m{}_2 & \cdots & A^m{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^i \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^i \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

כעת, לכל i,

$$b^i = A^i{}_1 \, u^1 + A^i{}_2 \, u^2 + \cdots + A^i{}_n \, u^n = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j \, u^j$$

ולפי סכימת איינשטיין:

$$v^i = A^i{}_j \, u^j$$

הערה 1.1 כמה דברים שיש לשים אליהם לב:

1. סכימת איינשטיין נקראת גם **סימון איינשטיין** או **הסכם הסכימה של איינשטיין**.
2. חשוב לשים לב להקשר בו מוצג הסימון. למשל, איך נדע אם v^2 משמעו הקואורדינטה השנייה בוקטור v או v בריבוע? מההקשר בו מוצג הסימון.

3. באופן דומה, כשנציג סכום בסימון איינשטיין, למשל: $v^i = A^i{}_j u^j$, אנו לא יודעים היכן האינדקס j רץ; עלינו להבין זאת מההקשר.

<u>תזכורת:</u>

המכפלה הסלקרית ב־$\mathbb{R}^3$ מוגדרת על ידי:

$$\langle u, v\rangle = u \cdot v = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 = \sum_{i=1}^{3} u^iv^i$$

כאשר $u = \left(u^1, u^2, u^3\right), v = \left(v^1, v^2, v^3\right)$.

אי־אפשר לכתוב את הסכום הזה כ־u^iv^i לפי סכימת איינשטיין, מכיוון שהאינדקס נמצא רק למעלה (ולא למעלה ולמטה כנדרש).

איך בכל זאת נציג את המכפלה הסקלרית בעזרת סכימת איינשטיין?

הגדרה 1.2 הדלתא של קרונקר מוגדרת על ידי:

$$\delta_{ij} = \delta^i{}_j = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

כאשר $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

נחזור לבעיה שלנו. אם נשתמש בדלתא של קרונקר:

$$\delta_{ij}u^iv^j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}u^iv^j =$$

לפי סכימת איינשטיין; במקרה שלנו, $n = 3$.

מהגדרת הדלתא של קרונקר נישאר עם:

$$= u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 = u \cdot v$$

כלומר:

$$u \cdot v = \delta_{ij}u^iv^j$$

והבענו את המכפלה הסקלרית באמצעות סכימת איינשטיין.

הערה 1.3 אינדקס שלא סוכמים עליו נקרא **אינדקס חופשי**.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שפעולת כפל מטריצות היא קיבוצית, אסוציאטיבית.

כלומר, הראו שעבור מטריצות A, B, C מתקיים:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

<u>פתרון:</u>

נניח כמובן שאפשר לכפול את המטריצות זו בזו.

ראשית, ננסה להבין איך נראה איבר במכפלת מטריצות:

$$(A \cdot B)^i{}_j = R_i(A) \cdot C_j(B) = \sum_k A^i{}_k B^k{}_j = A^i{}_k B^k{}_j$$

לפי סכימת איינשטיין.

לפיכך:

$$(A \cdot (B \cdot C))^i{}_j = A^i{}_k (B \cdot C)^k{}_j = A^i{}_k \left(B^k{}_l C^l{}_j \right) =$$

פעולת הכפל על סקלרים בוודאי אסוציאטיבית, ולכן:

$$= \left(A^i{}_k B^k{}_l \right) C^l{}_j = (A \cdot B)^i{}_l C^l{}_j = ((A \cdot B) \cdot C)^i{}_j$$

כלומר לכל i, j איברי המטריצות $A \cdot (B \cdot C), (A \cdot B) \cdot C$ שווים ולכן הן שוות.

לכן פעולת כפל מטריצות היא אכן אסוציאטיבית.

<u>תרגיל:</u>

מטריצה A נקראת אידמפוטנטית, אם $A^2 = A$.

כתבו תנאי זה בסימוני איינשטיין.

<u>פתרון:</u>

אנו רוצים שלכל i, j יתקיים $\left(A^2\right)^i{}_j = A^i{}_j$. $A^2 = A \cdot A$ ולכן:

$$\left(A^2\right)^i{}_j = A^i{}_k A^k{}_j$$

ולכן, לפי סכימת איינשטיין, נאמר שמטריצה A היא אידמפוטנטית, אם:

$$A^i{}_k A^k{}_j = A^i{}_j$$

תרגילים נוספים

1. כתבו בצורה מלאה את הסכומים הבאים הנתונים בסימון הסכימה של איינשטיין:

   (א) $a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_l$.

   (ב) $a_{ij}v^iv^j$.

   (ג) $\delta_{ij}a^{ij}$.

   כאשר $i,j,k,l \in \{1,2,3\}$.

2. תהיינה $A,B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו בעזרת סימון הסכימה של איינשטיין שמתקיים:

$$tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right)$$

3. בעזרת סימון הסכימה של איינשטיין, הוכיחו שכפל מטריצות מקיים את תכונת הפילוג, דיסטריביוטיביות.
   כלומר, הראו שלכל $A,B,C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים:

$$A\left(B+C\right) = AB+AC, \left(A+B\right)C = AC+BC$$

4. תהי $\delta^i{}_j$ פונקציית דלתא של קרונקר, כאשר $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$. חשבו את הביטוי $\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i$, הנתון בסימון הסכימה של איינשטיין.

5. נתונה מטריצה A מגודל 2×2. נסמן ב־T_1 את העקבה של A וב־T_2 את העקבה של A^2. ידוע שהפולינום האופייני של המטריצה A הוא:

$$p_A\left(x\right) = x^2+ax+b$$

   כאשר $a=-T_1, b=\frac{1}{2}\left(T_1^2-T_2\right)$.
   משפט קיילי המילטון קובע שכל מטריצה ריבועית מאפסת את הפולינום האופייני שלה, קרי: $p_A\left(A\right)=0$.
   בטאו את משפט קיילי המילטון בעזרת הנוסחה $p_A\left(x\right) = x^2+ax+b$.

פתרונות

1. נרשום לפי סכימת איינשטיין:

(א) $\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a^i{}_j \; b^j{}_k \; c^k{}_l = a^i{}_j \; b^j{}_k \; c^k{}_l$, כלומר:

$$= a^i{}_1 \; b^1{}_1 \; c^1{}_l + a^i{}_1 \; b^1{}_2 \; c^2{}_l + a^i{}_1 \; b^1{}_3 \; c^3{}_l +$$

$$+ a^i{}_2 \; b^2{}_1 \; c^1{}_l + a^i{}_2 \; b^2{}_2 \; c^2{}_l + a^i{}_2 \; b^2{}_3 \; c^3{}_l +$$

$$+ a^i{}_3 \; b^3{}_1 \; c^1{}_l + a^i{}_3 \; b^3{}_2 \; c^2{}_l + a^i{}_3 \; b^3{}_3 \; c^3{}_l$$

מכיוון שהאינדקסים שנמצאים גם למעלה וגם למטה הם i, j.

(ב) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}v^iv^j = a_{ij}v^iv^j$, כלומר:

$$= a_{11}v^1v^1 + a_{12}v^1v^2 + a_{13}v^1v^3 +$$

$$+ a_{21}v^2v^1 + a_{22}v^2v^2 + a_{23}v^2v^3 +$$

$$+ a_{31}v^3v^1 + a_{32}v^3v^2 + a_{33}v^3v^3$$

(ג) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}a^{ij} = \delta_{ij}a^{ij}$, ומהגדרת הדלתא של קרונקר:

$$= a^{11} + a^{22} + a^{33}$$

2. העקבה היא סכום איברי האלכסון, כידוע. לכן:

$$tr\left(AB\right) = \left(AB\right)^i{}_i = A^i{}_j \; B^j{}_i = B^j{}_i \; A^i_j = \left(BA\right)^j{}_j = tr\left(BA\right)$$

3. נראה אחד מהצדדים; הצד השני דומה.

$$\left(A\left(B+C\right)\right)^i{}_j = A^i{}_k \; \left(B+C\right)^k{}_j = A^i{}_k \; \left(B^k{}_j + C^k{}_j\right) = A^i{}_k \; B^k{}_j + A^i{}_k \; C^k{}_j =$$

$$= \left(AB\right)^i{}_j + \left(BC\right)^i{}_j = \left(AB+BC\right)^i{}_j$$

מכיוון שהמטריצות שוות איבר־איבר, הן שוות.

4. ${\delta^i}_j\,{\delta^j}_k\,{\delta^k}_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n {\delta^i}_j\,{\delta^j}_k\,{\delta^k}_i$.
מחובר כללי בסכום לא מתאפס כאשר $i=j=k$, ואז המחובר שווה ל־1.
זה מתרחש בדיוק n פעמים (כאשר $i=j=k=l$ לכל $1\le l\le n$), ולכן הסכום הוא n.

5. נסמן: $C=A^2$. לכן:

$$-a=T_1={a^i}_i\ ,T_2={c^i}_i$$

כעת, ${c^i}_j={a^i}_k\,{a^k}_j$. לכן:

$$b=\frac{1}{2}\left(\left(-{a^i}_i\right)^2-{a^i}_k\,{a^k}_i\right)$$

לפי משפט קיילי המילטון,

$$A^2+aA+bI=0$$

אם נכתוב זאת במפורש נקבל:

$$\begin{pmatrix} {a^1}_k\,{a^k}_1 & {a^1}_k\,{a^k}_2 \\ {a^2}_k\,{a^k}_1 & {a^2}_k\,{a^k}_2 \end{pmatrix} - {a^i}_i \begin{pmatrix} {a^1}_1 & {a^1}_2 \\ {a^2}_1 & {a^2}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\left(-{a^i}_i\right)^2-{a^i}_k\,{a^k}_i\right)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואם נשווה איבר־איבר ל־0 נקבל:

$${a^i}_k\,{a^k}_j - {a^m}_m\,{a^i}_j + \frac{1}{2}\left(\left(-{a^m}_m\right)^2-{a^m}_k\,{a^k}_m\right)=0$$

2 מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית

2.1 מכפלה סקלרית

לכל שני וקטורים $u,v\in\mathbb{R}^n$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^n u^i v^i$$

כאשר u^i היא הקואורדינטה ה$-i$ של הוקטור u.
זו **המכפלה הסקלרית** בין הוקטורים u,v.
אפשר להביע את המכפלה הסקלרית גם באופן גיאומטרי:

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta$$

כאשר $\|u\|$ מסמל את האורך של u ו$-\theta$ היא הזווית החדה בין שני הוקטורים.
את הנורמה $\|u\|$ מחשבים על ידי:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

המכפלה הסקלרית מקיימת את התכונות הבאות:

1. $u\perp v$ אם ורק אם u,v מאונכים אם ורק אם $\langle u,v\rangle = 0$.
2. סימטריות: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.
3. אי שליליות: $\langle u,u\rangle \geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $\langle u,u\rangle = 0$.
4. פילוג: $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$.
לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$.

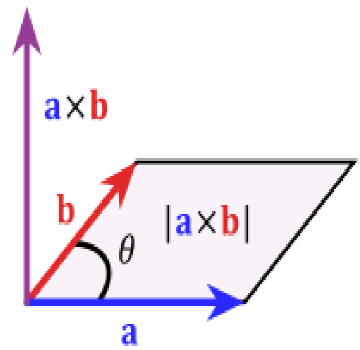
2.2 מכפלה וקטורית

המכפלה הוקטורית מוגדרת רק לוקטורים מ$-\mathbb{R}^3$, ותוצאתה היא וקטור (ולא סקלר).

$$u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = (u^2v^3 - v^2u^3, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - v^1u^2)$$

גיאומטרית, המכפלה הוקטורית מחשבת את שטח המקבילית שנוצרת ע"י הוקטורים.
אפשר להכליל את המכפלה הוקטורית למימדים גבוהים בעזרת מכפלה טנזורית.
כלומר, $\|a\times b\|$ מבטא את נפח המקבילית הנוצרת ע"י a,b.
אפשר להביע זאת גם באופן גיאומטרי: $\|a\times b\| = \|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$.
כמו כן, הוקטור $a\times b$ מאונך לוקטורים a,b (ולכן מאונך למישור הנפרש על ידיהם), ובאוריינטציה חיובית, כלומר:

$$\det(a,b,a\times b) > 0$$



המכפלה הוקטורית מקיימת את התכונות הבאות:

1. אנטי סימטריות: $a\times b=-b\times a$.
2. פילוג: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.
3. זהות יעקובי: $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$.

לכל $a,b,c\in\mathbb{R}^3$.

תרגיל:

הוכיחו את **זהות לגראנז'**:

$$\|u\times v\|=\|u\|^2\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2$$

פתרון:

נשתמש בזהויות הגיאומטריות:

$$\|u\times v\|^2=\|u\|^2\cdot\|v\|^2\cdot\sin^2\theta=\|u\|^2\cdot\|v\|^2\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)=$$

$$=\|u\|^2\cdot\|v\|^2-\|u\|^2\cdot\|v\|^2\cos^2\theta=\|u\|^2\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2$$

זהות לגראנז' נותנת לנו קשר בין שתי המכפלות.

תרגילים נוספים

1. יהיו $a=(2,3,1)\,,b=\left(0,4,\frac{1}{2}\right)\,,c=(6,1,-4)$.

   (א) חשבו את הזווית בין a לבין b.

(ב) חשבו את שטח המקבילית הנוצרת על ידי b, c.

2. יהיו $a, b \in \mathbb{R}^3$ אורתונורמליים. הראו ש: $\{a, b, a \times b\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.

3. יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$. הוכיחו את הזהויות הבאות:

(א) $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$.

(ב) $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$.

פתרונות

1. נשתמש בתכונות המכפלה הסקלרית והמכפלה הוקטורית.

(א) מתקיים:

$$\cos \theta = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

במקרה שלנו, $\langle a, b \rangle = \frac{25}{2}, \|a\| = \sqrt{14}, \|b\| = \sqrt{\frac{65}{4}}$, ולכן:

$$\cos \theta = \frac{\frac{25}{2}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{65}{4}}} = \frac{25}{\sqrt{910}} \approx 0.8287$$

ולכן: $\theta \approx 0.5939$, כלומר $\theta \approx 34.03^o$.

(ב) נחשב את $b \times c$:

$$b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = i \cdot \left(-\frac{33}{2}\right) - j \cdot (-3) + k \cdot (-24) = \left(-\frac{33}{2}, 3, -24\right)$$

שטח המקבילית הוא:

$$\|b \times c\| = \sqrt{\left(\frac{33}{2}\right)^2 + 3^2 + 24^2} \approx 29.2788$$

2. מתכונות המכפלה הוקטורית, אנו יודעים שהוקטורים מאונכים; אפשר לבדוק שאכן מתקיים:

$$\langle a, a \times b \rangle = \langle b, a \times b \rangle = 0$$

נותר להראות שמתקיים:

$$\|a\times b\|=1$$

נשתמש בזהות הגיאומטרית:

$$\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$$

מכיוון שהוקטורים a,b אורתונורמליים, $\|a\|,\|b\|=1$ והזווית ביניהם היא: $\theta=\frac{\pi}{2}$,
ולכן גם: $\sin\theta=1$.
נקבל בסה"כ שאכן $\|a\times b\|=1$.

3. נסמן: $a=\left(a^1,a^2,a^3\right)$, ובאופן דומה עבור b,c,d.

(א) מתקיים: $b\times c=\left(b^2c^3-b^3c^2,b^3c^1-b^1c^3,b^1c^2-b^2c^1\right)$.
לכן, הוקטור $a\times(b\times c)$ נראה כך (כל קואורדינטה בשורה נפרדת):

$$\begin{aligned}(a\times(b\times c))^1&=a^2\left(b^1c^2-b^2c^1\right)-a^3\left(b^3c^1-b^1c^3\right)\\(a\times(b\times c))^2&=a^3\left(b^2c^3-b^3c^2\right)-a^1\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\\(a\times(b\times c))^3&=a^1\left(b^3c^1-b^1c^3\right)-a^2\left(b^2c^3-b^3c^2\right)\end{aligned}$$

נפתח סוגריים ונוציא גורם משותף:

$$\begin{aligned}(a\times(b\times c))^1&=b^1\left(a^2c^2+a^3c^3\right)-c^1\left(a^2b^2+a^3b^3\right)\\(a\times(b\times c))^2&=b^2\left(a^3c^3+a^1c^1\right)-c^2\left(a^1b^1+a^3b^3\right)\\(a\times(b\times c))^3&=b^3\left(a^1c^1+a^2c^2\right)+c^3\left(a^2b^2+a^1b^1\right)\end{aligned}$$

נתבונן, למשל, בקואורדינטה הראשונה:

$$(a\times(b\times c))^1=b^1\left(a^2c^2+a^3c^3\right)-c^1\left(a^2b^2+a^3b^3\right)+b^1a^1c^1-c^1a^1b^1$$

הוספנו וחיסרנו את אותו האיבר. כלומר:

$$(a\times(b\times c))^1=b^1\left(a^1c^1+a^2c^2+a^3c^3\right)-c^1\left(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3\right)$$

ואם כן, קיבלנו:

$$(a\times(b\times c))^1=b^1\langle a,c\rangle-c^1\langle a,b\rangle$$

באופן דומה, נקבל בשתי הקואורדינטות האחרות:

$$\begin{aligned}(a\times(b\times c))^2&=b^2\langle a,c\rangle-c^2\langle a,b\rangle\\(a\times(b\times c))^3&=b^3\langle a,c\rangle-c^3\langle a,b\rangle\end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$a\times(b\times c)=\left(b^1\langle a,c\rangle-c^1\langle a,b\rangle,b^2\langle a,c\rangle-c^2\langle a,b\rangle,b^3\langle a,c\rangle-c^3\langle a,b\rangle\right)$$

ובסה"כ:

$$a\times(b\times c)=\langle a,c\rangle b-\langle a,b\rangle c$$

(ב) נפתח את $\langle a\times b,c\times d\rangle$:

$$\left\langle\left(a^2b^3-a^3b^2,a^3b^1-a^1b^3,a^1b^2-a^2b^1\right),\left(c^2d^3-c^3d^2,c^3d^1-c^1d^3,c^1d^2-c^2d^1\right)\right\rangle$$

נקבל:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}a^ic^ib^jd^j-\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}a^id^ic^jb^j$$

נוסיף ונחסר את האיברים $a^ib^ic^id^i$ ונקבל:

$$\sum_{i,j=1}^{3}a^ic^ib^jd^j-\sum_{i,j=1}^{3}a^id^ic^jb^j$$

נפצל את הסכומים:

$$\sum_{i=1}^{3}a^ic^i\sum_{j=1}^{3}b^jd^j-\sum_{i=1}^{3}a^id^i\sum_{j=1}^{3}b^jc^j$$

וזה אכן שווה לביטוי:

$$\langle a,c\rangle\cdot\langle b,d\rangle=\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$$

חשבו איך ניתן להביע זאת באמצעות סימון איינשטיין.

3 תבניות ריבועיות וחתכי חרוט

3.1 תבניות ריבועיות במישור

הגדרה 3.1 תבנית ריבועית במישור היא עקומה המוגדרת על ידי פולינום ממעלה שנייה במשתנים x,y:

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

כאשר $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$.

תבנית ריבועית במישור יכולה לתאר אחת מהצורות הבאות:

1. אליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

מעגל: $x^2+y^2=R^2$ ונקודה: $x^2+y^2=0$ הם מקרים פרטיים של האליפסה.

2. היפרבולה:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

הקווים $y=\pm x$ הם מקרה פרטי של ההיפרבולה: $x^2-y^2=0$.

3. פרבולה:

$$x=ay^2+c$$

4. קו ישר:

$$x=a$$

.

הצורות האלו נקראות **צורות קנוניות.**

מטרתנו היא להבין מהי הצורה הגיאומטרית אותה מתארת תבנית ריבועית, ומהי הצורה הקנונית שלה.

אם כך, איך מסווגים תבניות ריבועיות?

בשלב הראשון, נתבונן ב: $ax^2+2bxy+cy^2$. אפשר לכתוב:

$$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נסמן: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. A מטריצה סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונאלי מעל $\mathbb{R}$.

כלומר, $A=PDP^{-1}$, כאשר:

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

כאשר u_i הוא הוקטור העצמי המתאים לערך העצמי λ_i:

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

יתרה מזאת, הוקטורים u_1, u_2 הם אורתונורמליים, ולכן המטריצה P היא מטריצה אורתוגונאלית.
בפרט:

$$P^{-1} = P^t$$

ואז $A = PDP^t$, כלומר $P^tAP = A$. המשוואה שלנו היא:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ונוכל לכתוב:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

אם נסמן: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P$, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

מכיוון ש: $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t P^t = \left(P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.
אם כן:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

ומכאן אפשר להגיע לצורה:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

הצורה הזו נקראת **הצורה האלכסונית** של התבנית הריבועית.

משפט 3.2 בעזרת הערכים העצמיים אפשר להכריע מהי הצורה הגיאומטרית:

1. אם $\lambda_1\lambda_2 > 0$, נקבל אליפסה.
2. אם $\lambda_1\lambda_2 < 0$, נקבל היפרבולה.
3. אם $\lambda_1\lambda_2 = 0$ אך $\lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0$ נקבל פרבולה.
4. אם $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ נקבל קו ישר.

בשלב השני, אנו נפטרים מהגורמים הליניאריים gx', hy'.

נעשה זאת באמצעות השלמה לריבוע:

$$\lambda_1 \left(x' + \alpha\right)^2 = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + 2\alpha\lambda_1 x' + \lambda_1\alpha^2$$

כדי לאפס את g נבחר α המקיים: $2\alpha\lambda_1 = g$, כלומר:

$$\alpha = \frac{g}{2\lambda_1}$$

באופן דומה:

$$\lambda_2 \left(y' + \beta\right)^2 = \lambda_2 \left(y'\right)^2 + 2\beta\lambda_2 y' + \lambda_2\beta^2$$

ונבחר $\beta = \frac{h}{2\lambda_2}$. נקבל:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 + f - \frac{g^2}{4\lambda_1} - \frac{h^2}{4\lambda_2} = 0$$

ואפשר לכתוב:

$$\lambda_1 \left(x' - \alpha\right)^2 + \lambda_2 \left(y' - \beta\right)^2 + k = 0$$

וקיבלנו צורה קנונית, כשהיא מוזזת ומסובבת.

הערה 3.3 א. כאשר אחד מהערכים העצמיים מתאפס, אי אפשר לאפס את אחד מהגורמים הליניאריים (ומקבלים פרבולה).

ב. הצורה הקנונית איננה יחידה.

ג. למה אנו רוצים מטריצה אורתוגונאלית דווקא? מטריצה אורתוגונאלית היא **שומרת נורמה**, כלומר:

$$\|Pv\| = \|v\|$$

שימוש במטריצה מלכסנת כללית יכול לכווץ או להרחיב את העקומה, בעוד שאנו רוצים רק לסובב ולהזיז אותה, מבלי לעוות; מטריצה אורתוגונאלית שומרת נורמה ולכן שומרת על צורתה של העקומה (בעצם, מדובר באיזומטריה).

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בעקומה:

$$x = \frac{1}{y}$$

ננסה להבין מהי הצורה הגיאומטרית אותה מתארת העקומה, ומהי הצורה הקנונית שלה.

אם כן, את העקומה שלנו אפשר להציג כך:

$$xy - 1 = 0$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית.

נמצא את הערכים העצמיים:

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן $u^1 = u^2$. אנו רוצים וקטור אורתונורמלי ולכן נבחר: $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן $u^1 = -u^2$. אנו רוצים וקטור אורתונורמלי ולכן נבחר: $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

לכן:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ואם נציב $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$, נקבל:

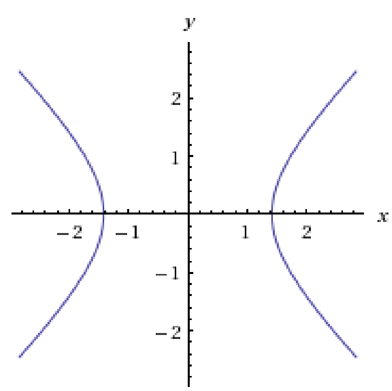
$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}-1=0$$

כלומר:

$$\frac{(x')^2}{2}-\frac{(y')^2}{2}=1$$

וזו היפרבולה.

העקומה נראית כך:



<u>תרגיל:</u>

סווגו את העקומות הריבועיות הבאות והביאו אותן לצורה קנונית.

1. $x^2-2xy+3y^2-4x+5y-6=0$.

<u>פתרון:</u>

מתקיים:

$$x^2-2xy+3y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית.
נמצא את הערכים העצמיים:

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

נקבל שהערכים העצמיים הם $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$.
נמצא את הוקטורים העצמיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \left(2 + \sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

פותרים את המשוואות ומקבלים: $u^1 = \left(1 + \sqrt{2}\right) u^2$, כלומר: $u = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

נרמל ונקבל: $u = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \left(2 - \sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

פותרים את המשוואות ומקבלים: $u^1 = \left(1 - \sqrt{2}\right) u^2$, כלומר: $u = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

נרמל ונקבל: $u = \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
המטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \end{pmatrix}$$

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P$, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 6$$

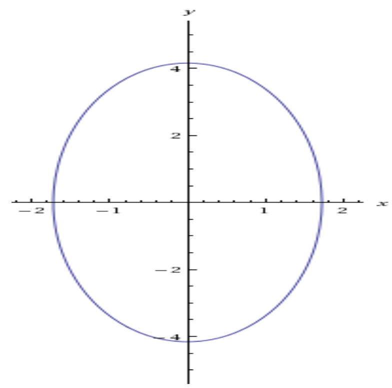
כלומר:

$$\left(2 + \sqrt{2}\right) (x')^2 + \left(2 - \sqrt{2}\right) (y')^2 + \frac{1 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \sqrt{8}}} x' + \frac{1 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \sqrt{8}}} y' = 6$$

אחרי השלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

כאשר: $b^2=\frac{81}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}, a^2=\frac{81}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}$.
זוהי אליפסה.
העקומה נראית כך:



ב. $x^2-2xy+y^2+y=0$.
<u>פתרון:</u>
מתקיים:

$$x^2-2xy+y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית.
נמצא את הערכים העצמיים:

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda$$

ולכן $\lambda=0,2$.
נמצא את הוקטורים העצמיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל $u^1 = u^2$, ולכן נבחר $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל $u^1 = -u^2$, ולכן נבחר $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

לפיכך, המטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ואם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$2\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0$$

כלומר:

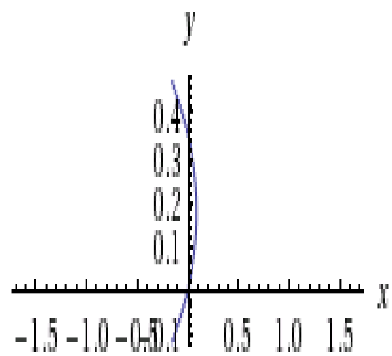
$$\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{8}}x' - \frac{1}{\sqrt{8}}y' = 0$$

נשלים לריבוע ונקבל:

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{32}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{8}}x' = \frac{1}{\sqrt{32}}$$

אפשר לסדר עוד קצת; זו פרבולה.

העקומה נראית כך:

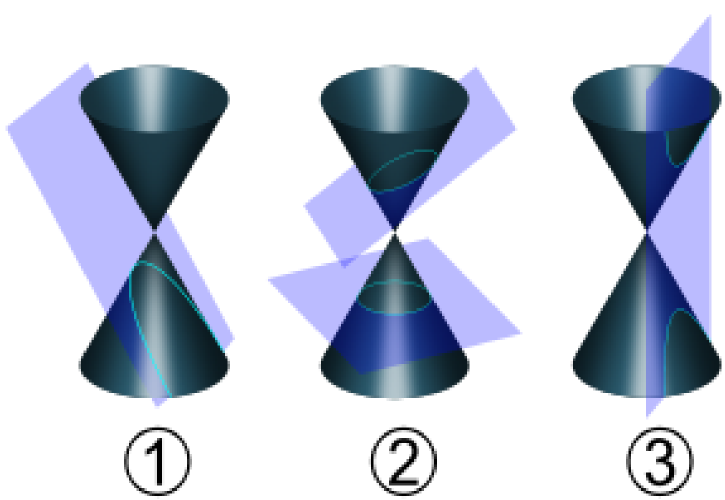


3.2 חתכי חרוט

תבניות ריבועיות דו־מימדיות נקראות גם חתכי חרוט, מכיוון שכל העקומות האלו ־ אליפסה, היפרבולה ופרבולה ־ ניתנות להצגה כחיתוך של חרוט מהצורה:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

עם מישור.



בתמונה ניתן לראות שצורת העקומה תלויה בזווית בה המישור חותך את החרוט.

1. אם חותכים ב־$\frac{\pi}{4}$ מקבלים פרבולה.
2. אם חותכים בזווית הקטנה מ־$\frac{\pi}{4}$ מקבלים אליפסה.

3. אם חותכים בזווית הגדולה מ־$\frac{\pi}{4}$ מקבלים היפרבולה.

3.3 מטריצות סיבוב

3.3.1 מטריצות סיבוב במישור

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ בזווית של θ נגד כיוון השעון, עלינו לכפול אותו במטריצת הסיבוב:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

שימו לב שעמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ (לכל θ), ולכן R_θ מטריצה אורתוגונאלית, ובפרט שומרת נורמה.

<u>לדוגמה:</u>

נסובב את הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ב־$\frac{\pi}{2}$. לכן, עלינו לכפול אותו במטריצה:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הערה 3.4 במישור אפשר לסובב וקטור בשני כיוונים - עם כיוון או השעון או נגדו. אפשר להתייחס אל סיבוב בזווית של θ עם כיוון השעון כאל סיבוב בזווית של $-\theta$ נגד כיוון השעון, ולכן יש בעצם רק כיוון סיבוב אחד במישור - נגד כיוון השעון.

3.3.2 מטריצות סיבוב במרחב

בניגוד למישור, שם יש לנו רק כיוון אחד בו אפשר לסובב וקטור, במרחב אפשר לסובב וקטור סביב כל אחד מהצירים.

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ בזווית של θ סביב ציר ה־x, נכפול אותו במטריצה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ בזווית של θ סביב ציר ה$-y$, נכפול אותו במטריצה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ בזווית של θ סביב ציר ה$-x$, נכפול אותו במטריצה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שימו לב שבכל אחד מהמקרים עמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ (לכל θ), ולכן R_θ מטריצה אורתוגונאלית, ובפרט שומרת נורמה.

<u>תרגיל:</u>

סובבו את הוקטורים הבאים סביב אחד מהצירים בזווית של $\frac{\pi}{2}$ ושל $\frac{\pi}{4}$.

1. $(-1,1,3)$.
2. $(2,0,2)$.
3. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

<u>פתרון:</u>

נסובב למשל סביב ציר ה$-z$. מטריצות הסיבוב המתאימות הן:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$$

3. נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

3.4 משטחים ריבועיים

הגדרה 3.5 משטח ריבועי או תבנית ריבועית במרחב הוא משטח המוגדר על ידי פולינום ממעלה שנייה במשתנים x,y,z:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+jz+k=0$$

כאשר $a,b,c,d,e,f,g,h,j,k\in\mathbb{R}$.

בדומה לתבניות ריבועיות במישור, גם כאן נרצה בשלב הראשון להביא את התבנית לצורה אלכסונית על ידי לכסון אורתוגונאלי של המטריצה המתאימה:

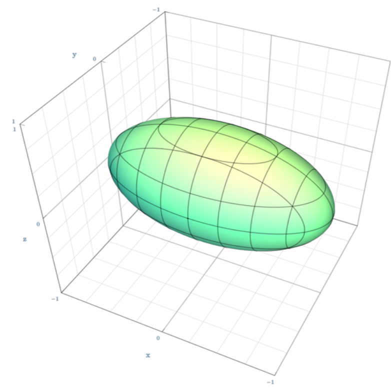
$$A=\begin{pmatrix}a&d&e\\d&b&f\\e&f&c\end{pmatrix}$$

ובשלב השני להביא את התבנית לצורה אלכסונית.

למשטח ריבועי יכולות להיות אחת מהצורות הקנוניות הבאות:

1. אליפסואיד:

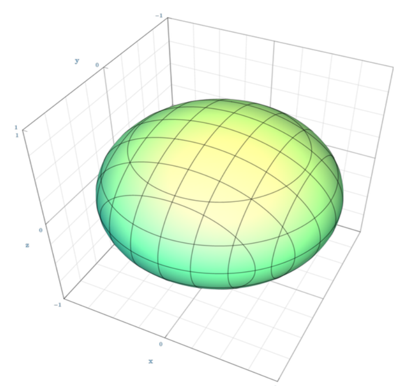
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



לאליפסואיד שני מקרים פרטיים מעניינים:

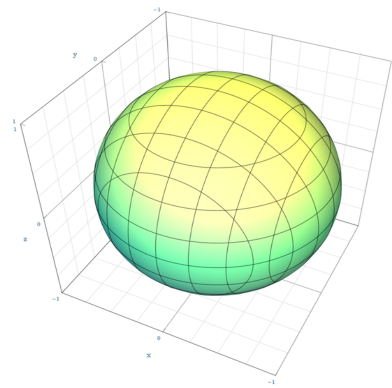
(א) ספרואיד:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



(ב) ספירה:

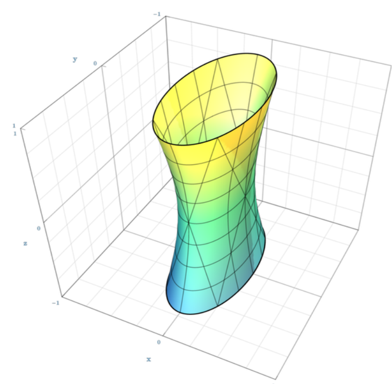
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$



2. היפרבולואיד:

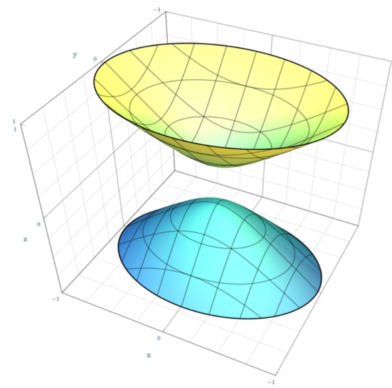
(א) חד־יריעתי:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



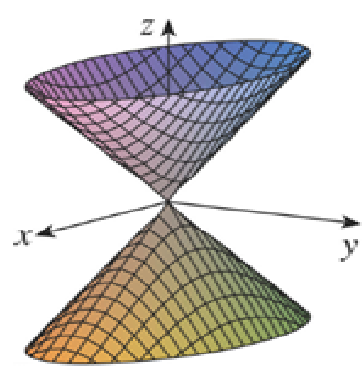
(ב) דו־יריעתי:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



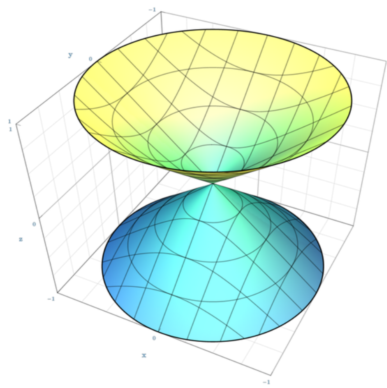
(ג) מקרה פרטי של ההיפרבולואיד הוא החרוט:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



(ד) מקרה פרטי של החרוט הוא חרוט מעגלי:

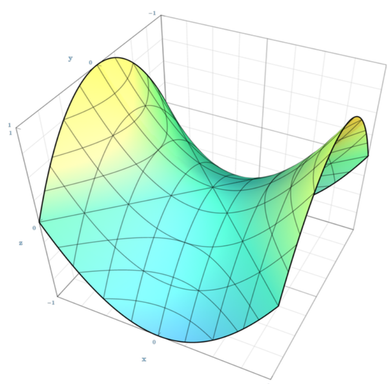
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$$



3. פרבולואיד:

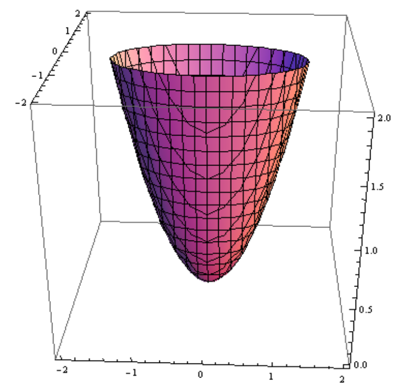
(א) היפרבולי:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



(ב) אליפטי:

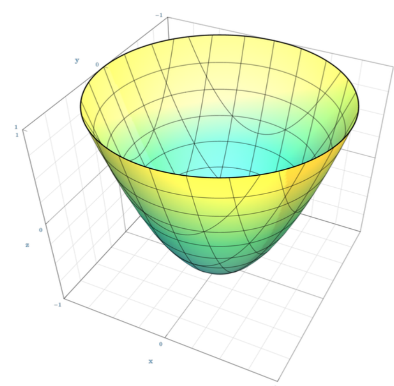
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



כמו בפרבולה במישור, גם בפרבולואיד אחד מהמשתנים לא מופיע במעלה שנייה אלא במעלה ראשונה.

(ג) מקרה פרטי של הפרבולואיד האליפטי הוא הפרבולואיד המעגלי:

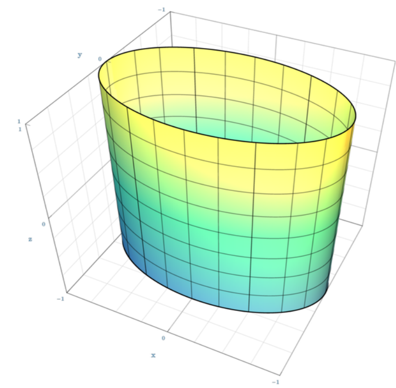
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$$



4. כאשר אחד מהמשתנים לא מופיע, הצורה נקראת **צורה מנוונת** ($degenerate$). משטחים מנוונים הם גלילים:

(א) גליל אליפטי:

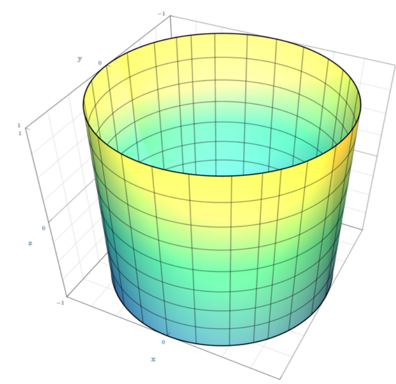
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



במישור היינו מקבלים מעגל, אך במרחב עלינו להתחשב ב$-z$.

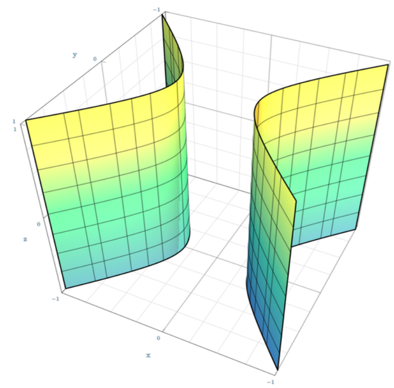
(ב) מקרה פרטי של הגליל האליפטי הוא גליל מעגלי:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



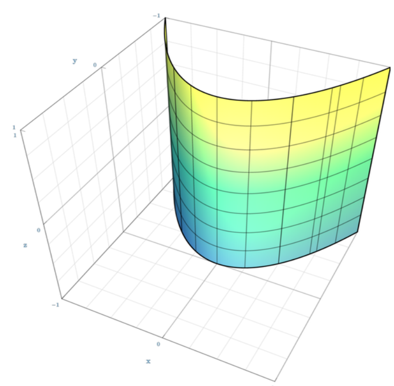
(ג) גליל היפרבולי:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



(ד) גליל פרבולי:

$$x^2 + 2ay$$



<u>תרגיל:</u>

סווגו את המשטח הריבועי הבא:

$$9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 12xy + 6xz + 5x - 6y - 3z = 2$$

<u>פתרון:</u>

המטריצה שלנו היא: $A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}$. נמצא את הע"ע:

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-9&-6&-3\\-6&\lambda-5&0\\-3&0&\lambda-5\end{vmatrix}=-3\left(3\left(\lambda-5\right)\right)+\left(\lambda-5\right)\left(\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-9\right)-36\right)=$$

$$=\left(\lambda-5\right)\left(\lambda^2-14\lambda+45-36-9\right)=\lambda\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-14\right)$$

לכן הע"ע הם $\lambda=0,5,14$.
נמצא וקטורים עצמיים מתאימים. עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=0\\6x+5y=0\\3x+5z=0\end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z=-\frac{3}{5}x, y=-\frac{6}{5}x$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$.
עבור $\lambda=5$:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=5x\\6x+5y=5y\\3x+5z=5z\end{cases}$$

נקבל ש: $x = 0$, ואם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל: $z = -2y$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda = 14$:

$$\begin{cases} 9x + 6y + 3z = 14x \\ 6x + 5y = 14y \\ 3x + 5z = 14z \end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z = -\frac{1}{3}x, y = -\frac{2}{3}x$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

אם כך, המטריצה המלכסנת P והאלכסונית D הן:

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

התבנית שלנו היא:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2$$

נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2$$

נשים לב שמתקיים:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{70}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -\sqrt{70} z'$$

ולכן בקואורדינטות החדשות נקבל:

$$14 \left(x'\right)^2 + 5 \left(y'\right)^2 - \sqrt{70} z' - 2 = 0$$

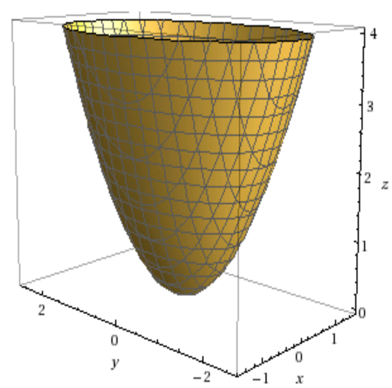
נעביר אגף ונקבל:

$$14 \left(x'\right)^2 + 5 \left(y'\right)^2 = \sqrt{70} \left(z' + \frac{2}{\sqrt{70}}\right)$$

נסמן: $z'' = z' + \frac{2}{\sqrt{70}}$, נחלק ב־$\sqrt{70}$ ונקבל:

$$\frac{14 \left(x'\right)^2}{\sqrt{70}} + \frac{5 \left(y'\right)^2}{\sqrt{70}} = z''$$

וזהו פרבולואיד אליפטי.



3.5 נקודות קריטיות של פונקציות $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ההגדרה והתהליך המפורט נמצאים בקורס אינפי 3. כאן רק נזכיר את מה שחשוב בקורס הזה.

הגדרה 3.6 **נקודה קריטית** של פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא נקודה שבה $\nabla f=0$.

נקודה קריטית יכולה להיות נקודת מינימום, נקודת מקסימום או נקודת אוכף.
את סוג הנקודה קובעים באמצעות מטריצת ההסיאן:

$$H_f=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

הערה 3.7 אנו נעסוק רק בפונקציות גזירות ברציפות פעמיים, עבורן $f_{xy}=f_{yx}$. במצב כזה H_f סימטרית ולכן תמיד יש לה ערכים עצמיים ב$-\mathbb{R}$.

אם שני הערכים העצמיים חיוביים, זו נקודת מינימום.
אם שניהם שליליים, זו נקודת מקסימום.
אם לערכים העצמיים סימנים שונים, זו נקודת אוכף.

הערה 3.8 כאשר אחד מהערכים העצמיים מתאפס, עלינו לבדוק את סוג הנקודה "ידנית".

<u>תרגיל:</u>
מצאו את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$$

וסווגו אותן.
<u>פתרון:</u>
נשווה את הגרידאנט ל-0:

$$\begin{cases} f_x=6x^2+y^2+10x=0 \\ f_y=2xy+2y=0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל: $2y(x+1)=0$.
אם $x=-1$, מהמשוואה הראשונה נקבל: $y^2-4=0$, והנקודות הן: $(-1,\pm2)$.
אם $y=0$, מהמשוואה השנייה נקבל $6x^2+10x=0$, והנקודות הן: $\left(-\frac{5}{3},0\right),(0,0)$.
מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f=\begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$$

נבדוק מה קורה בכל אחת מהנקודות:

$$H_f(-1,2)=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f(-1,-2)=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

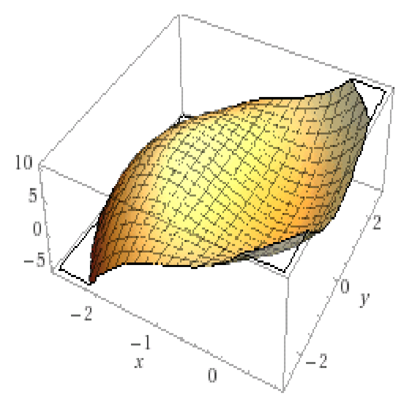
שוב, שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

$$H_f\left(-\frac{5}{3},0\right)=\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 0 & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

שני הע"ע שליליים ולכן זו נקודת מקסימום.
הגרף נראה כך:



תרגילים נוספים

1. סווגו את התבניות הריבועיות הבאות ומצאו להן צורה קנונית:

(א) $2x^2+y^2+3y=0$.

(ב) $x^2+2xy+3y^2-4x-5y+10=0$.

(ג) $-\frac{11}{196}x^2+\frac{5\sqrt{3}}{28}xy-\frac{1}{16}y^2+\frac{11}{14}x-\frac{5\sqrt{3}}{4}y-\frac{11}{4}=0$.

(ד) $4x^2+y^2-40x+6y+93=0$.

(ה) $xy-2x-6y+11=0$.

(ו) $x^2-4xy+y^2+8x+2y-5=0$.

2. סווגו את המשטחים הריבועיים הבאים על ידי הבאתם לצורה קנונית.

   (א) $6x^2+5y^2+5z^2+2\sqrt{2}x\left(y+z\right)+2yz=1$.

   (ב) $3x^2-2y^2-z^2-4xy-12yz-8xz=1$.

   (ג) $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}\left(x+y+z\right)^2$.

   (ד) $\left(z-2x-3y\right)\left(2z-5x+1\right)=0$.

   (ה) $\frac{x}{3}+\frac{4x^2}{9}+\frac{2y}{3}-\frac{8xy}{9}+\frac{4y^2}{9}+\frac{2z}{3}+\frac{4xz}{9}-\frac{4yz}{9}+\frac{z^2}{9}=1$.

   (ו) $-2x^2-y^2-2z^2+xz=1$.

3. מצאו וסווגו את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות.

   (א) $f\left(x,y\right)=3\left(x^2+y^2\right)+x^3+4y$.

   (ב) $f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3xy$.

פתרונות

1. בכל אחת מהתבניות נמצא את הע"ע של המטריצה. הצורה הקנונית אינה חד־משמעית, ואפשר להגיע בכל שאלה לצורות שונות.

   (א) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה כבר אלכסונית. הע"ע הם $1,2$, ולכן זו אליפסה.
לאחר השלמה לריבוע אפשר לקבל את הצורה הקנונית:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

כאשר $a^2=\frac{9}{8},b^2=\frac{9}{4}$.

(ב) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2 \pm \sqrt{2}$ ולכן זו אליפסה.

הו"ע הם: $\begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = -1$$

כאשר $a^2 = \frac{47}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}, b^2 = \frac{47}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}$.

כמובן שאין נקודות במישור שמקיימות את המשוואה, ולכן הגרף הוא ריק (אפשר לקרוא לו "אליפסה דמיונית").

(ג) המטריצה שלנו היא:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{196} & \frac{5\sqrt{3}}{56} \\ \frac{5\sqrt{3}}{56} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\frac{-93 \pm 5\sqrt{2353}}{1568}$, ולכן זו היפרבולה.

הו"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{2353}}{28\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$(y')^2 = (mx')^2$$

כאשר $m^2 = \frac{33737 + 465\sqrt{2353}}{25088}$. אלו שני ישרים.

(ד) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והיא כבר אלכסונית. הע"ע הם $0, 4$. לכן זו אליפסה.

לאחר השלמה לריבוע מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{16} = 1$$

(ה) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\pm\frac{1}{2}$. לכן זו היפרבולה.
הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{2}-\frac{(y')^2}{2}=1$$

(ו) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-1,3$ ולכן זו היפרבולה.
הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{6}-\frac{(y')^2}{2}=1$$

2. נביא את התבניות הריבועיות לצורה קנונית.

(א) המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix} 6 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 5 \end{pmatrix}$. נמצא ערכים עצמיים:

$$0=\begin{vmatrix} \lambda-6 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda-5 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix}=$$

$$= (\lambda-6)\left((\lambda-5)^2-1\right)+\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}(\lambda-5)-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}(\lambda-5)\right) =$$

$$= (\lambda-6)\left(\lambda^2-10\lambda+24\right)-2\left((\lambda-5)+1\right)-2\left(1+(\lambda-5)\right) =$$

$$= (\lambda-6)^2(\lambda-4)-4(\lambda-4) = (\lambda-4)\left(\lambda^2-12\lambda+32\right) =$$

$$= (\lambda-4)^2(\lambda-8)$$

הע"ע הם $\lambda = 4, 4, 8$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

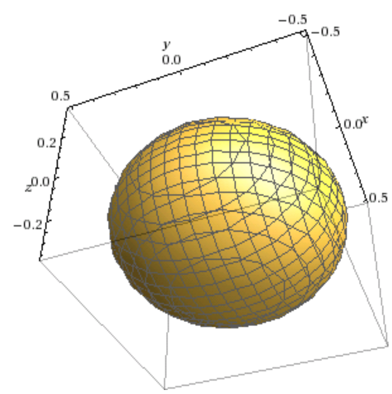
נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

כלומר:

$$4(x')^2 + 4(y')^2 + 8(z')^2 = 1$$

זהו אליפסואיד.



(ב) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = 3, 6, -9$.

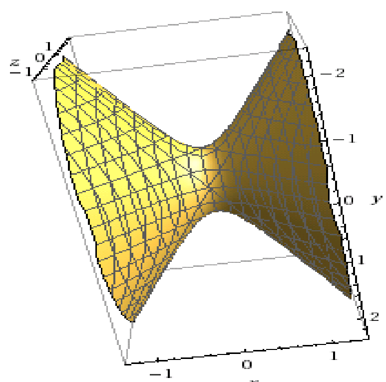
אם נציב $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,
נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

כלומר:

$$-9 (x')^2 + 3 (y')^2 + 6 (z')^2 = 1$$

זהו היפרבולואיד חד־יריעתי.



(ג) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4} \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{3}{2} (xy + xz + yz) = 0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = -\frac{5}{4}, 1, 1$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$-\frac{5}{4}(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$$

זהו חרוט.

(ד) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$2z^2 - 5xz + z - 4xz + 10x^2 - 2x - 6yz + 15xy - 3y = 0$$

כלומר:

$$10x^2 + 2z^2 + 15xy - 9xz - 6yz - 2x - 3y + z = 0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} 10 & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 0 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $0, \frac{12\pm\sqrt{406}}{2}$ = λ.

מכיוון שיש לנו ביטויים של x, y, z כבודדים, נצטרך למצוא את המטריצה המלכסנת במפורש.

הוקטורים העצמיים המתאימים לע"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-82\pm\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29\mp2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$. אנו צריכים לנרמל אותם:

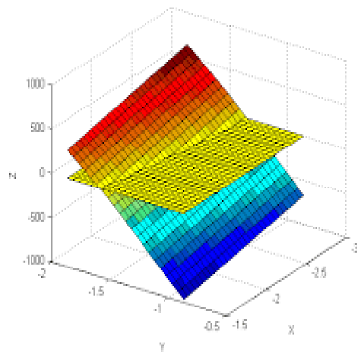
$$\frac{1}{\sqrt{7.8237}} \begin{pmatrix} \frac{-82+\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29-2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{74.6015}} \begin{pmatrix} \frac{-82-\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29+2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1.1644}} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}$$

אלו עמודות המטריצה המלכסנת P.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y^2 = \frac{275 + 12\sqrt{406}}{131} x^2$$

במישור אלו שני ישרים, אך במרחב התלת מימדי אלו שני מישורים.



(ה) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = 1, 0, 0$.

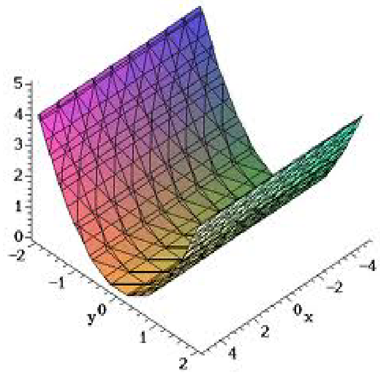
הו"ע המתאימים הם: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. ננרמל אותם ונקבל שהמטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y = x^2$$

במישור זוהי פרבולה; במרחב זהו גליל פרבולי.



(ו) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

הע״ע הם $\lambda = -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$-\left(x'\right)^2 - \frac{3}{2}\left(y'\right)^2 - \frac{5}{2}\left(z'\right)^2 = 1$$

זהו אליפסואיד ״דמיוני״, קבוצה ריקה.

3. נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונסווג באמצעות ההסיאן.

(א) נשווה $\nabla f = 0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x = 6x + 3x^2 = 0 \\ f_y = 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x = 0, -2$ ומהמשוואה השנייה נקבל $y = -\frac{2}{3}$, ולכן הנקודות הן:

$$\left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(-2, -\frac{2}{3}\right)$$

ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

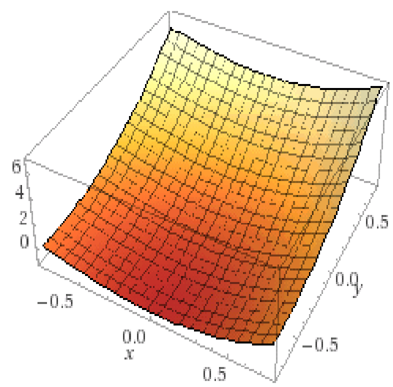
לפיכך:

$$H_f\left(0,-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
באופן דומה:

$$H_f\left(-2,-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.
הגרף נראה כך:



(ב) נשווה $\nabla f=0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x=-3y+3x^2=0 \\ f_y=-3x+3y^2=0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $y=x^2$. נציב זאת במשוואה השנייה:

$$-3x+3x^4=0$$

ולכן $x=0,1$ והנקודות הן:

$$(0,0)\,,(1,1)$$

ההסיאן היא:

$$H_f=\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$H_f\left(1,1\right)=\left(\begin{array}{cc}6 & -3\\ -3 & 6\end{array}\right)$$

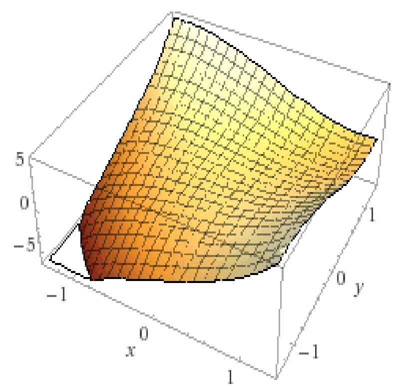
הע"ע שניהם חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

באופן דומה:

$$H_f\left(0,0\right)=\left(\begin{array}{cc}0 & -3\\ -3 & 0\end{array}\right)$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



4 עקומות

4.1 מבוא

עקומה היא גרף חד־מימדי במרחב n מימדי (למתקדמים ־ מרחב מקו־מימד $n-1$ במרחב ממימד n).

בקורס הזה נתעסק בעקומות מישוריות (ב$-\mathbb{R}^2$) ובעקומות מרחביות (ב$-\mathbb{R}^3$).

4.1.1 הצגה סתומה ופרמטריזציה

עקומות מישוריות אפשר להציג בשתי דרכים.

דרך אחת היא בצורה סתומה: $F\left(x,y\right)=0$.

כבר ראינו דוגמאות לעקומות כאלו ־ אליפסה, פרבולה וכן הלאה.

הדרך השנייה (בה אפשר להציג עקומה מכל מימד) היא באמצעות **פרמטריזציה.**

פרמטריזציה של עקומה היא פונקציה $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^n$.

<u>לדוגמה:</u>

1. קטע בין שתי נקודות a, b:

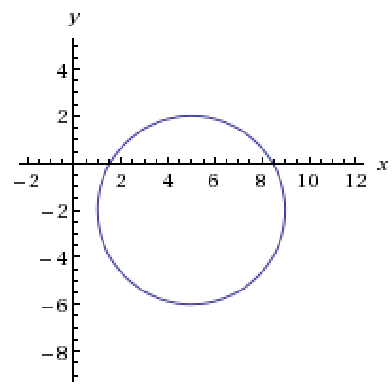
$$\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0,1]$$

2. מעגל קנוני עם רדיוס 1:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

באופן כללי, מעגל עם רדיוס R שמרכזו בנקודה (a,b):

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), t \in [0, 2\pi]$$



ומה יקרה אם נשנה את התחום?

למשל, אם התחום יהיה $t \in [0, 4\pi]$ נקבל את אותו המעגל, אבל בכל נקודה בו העקומה עוברת פעמיים! נתייחס לכך בהמשך.

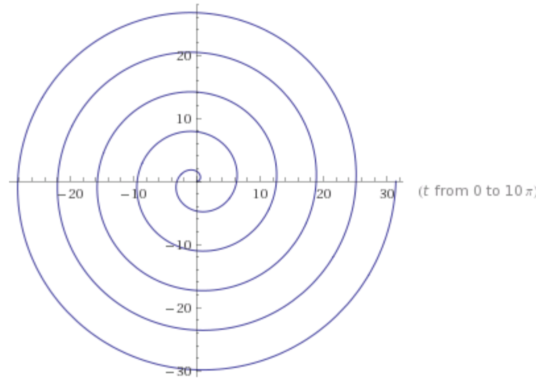
3. אליפסה עם מרכז בראשית הצירים ומוקדים a, b:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

4. מה יקרה אם במקום R בפרמטריזציה של המעגל נשים t:

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t), t \in [0, 10\pi]$$

ה"רדיוס" כל הזמן משתנה ולכן נקבל ספירלה:



<u>תרגיל:</u>

מצאו פרמטריזציה של מעגל היחידה, לא כולל הנקודה $(-1,0)$, באמצעות t שהוא המרחק בין הראשית לחיתוך של ציר ה$-y$ והמיתר בין הנקודה ל- $(-1,0)$ (כלומר, החיתוך עם ציר ה$-y$).

<u>פתרון:</u>

נתאר את הנקודות (x,y) שנמצאות על המעגל באמצעות t.

המיתר בין $(-1,0)$ לנקודה (x,y) חותך את ציר ה$-y$ בנקודה $(0,t)$; t הרי מוגדר להיות המרחק בין הראשית לחיתוך עם ציר ה$-y$ של המיתר.

לכן, שיפוע המיתר הוא:

$$M=\frac{t-0}{0-(-1)}=t$$

ולכן משוואת המיתר היא:

$$y-0=t\left(x-(-1)\right)$$

כלומר $y=t\left(x+1\right)$. הנקודה (x,y) שלנו נמצאת על המיתר ועל המעגל, ולכן אפשר להציב את משוואת המיתר במשוואת המעגל $x^2+y^2=1$:

$$x^2+\left(t\left(x+1\right)\right)^2=1$$

$$\left(1+t^2\right)x^2+2t^2x+t^2-1=0$$

זו משוואה ריבועית; נפתור אותה:

$$x_{1,2}=\frac{-2t^2\pm\sqrt{\left(2t^2\right)^2-4\left(1+t^2\right)\left(t^2-1\right)}}{2\left(1+t^2\right)}=\frac{-2t^2\pm2}{2\left(1+t^2\right)}$$

אם נבחר במינוס נקבל $x=-1$ והוא לא מתאים; לכן, נבחר בפלוס ונקבל:

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ולכן:

$$y=t\left(x+1\right)=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=t\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

כלומר, הפרמטריזציה שלנו תהיה:

$$\gamma\left(t\right)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

כאשר $t\in\mathbb{R}$. נשים לב שאכן קיבלנו את מעגל היחידה:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$$

4.1.2 אורך של עקומה

הגדרה 4.1 עבור עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נגדיר כמה הגדרות:

א. **וקטור המשיק** לעקומה γ הוא וקטור הנגזרות: $\gamma'\left(t\right)$.

ב. עקומה נקראת **פשוטה** אם היא חח"ע. אינטואיטיבית, פירוש הדבר שהעקומה אינה חותכת את עצמה.

ג. עקומה נקראת **סגורה** אם $\gamma\left(a\right)=\gamma\left(b\right)$.

ד. עקומה נקראת **רגולרית** אם לכל t $\gamma'\left(t\right)\neq0$.

ה. עקומה נקראת **חלקה** אם היא גזירה ברציפות ורגולרית.

ו. עקומה נקראת **חלקה למקוטעין** (ובאופן דומה גזירה ברציפות למקוטעין) אם היא חלקה פרט למספר סופי של נקודות.

ז. נגדיר **אורך של עקומה** להיות:

$$L\left(\gamma\right)=\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}\left\|\gamma\left(t_k\right)-\gamma\left(t_{k+1}\right)\right\|\right\}$$

כאשר הסופרימום רץ על כל $n\in\mathbb{N}$ ועל כל חלוקה של הקטע $[a,b]$. למעשה, זהו הסופרימום של אורכי העקומות שמקרבות את γ המורכבות מקטעים ישרים (עקומות פוליגונליות).

עקומה שלה אורך סופי נקראת **עקומה בעלת אורך**.

ת. אם העקומה שלנו חלקה, אפשר לחשב את אורכה ע"י הנוסחה:

$$L(\gamma)=\int\limits_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את אורך העקומה $\gamma(t)=\left(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t\right)$ כאשר $t\in[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שהעקומה שלנו חלקה. וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=\left(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}\right)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}=\sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}=e^t+e^{-t}$$

ואם כן האורך שלנו יהיה:

$$L(\gamma)=\int\limits_0^1\left(e^t+e^{-t}\right)dt=e-\frac{1}{e}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ונגדיר עקומה $\gamma(t)=(t,f(t))$ כאשר $t\in[0,1]$. האם העקומה הנ"ל היא בעלת אורך?

<u>פתרון:</u>

לא. נשים לב שעבור $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\begin{cases}\frac{1}{k} & k=2m\\ -\frac{1}{k} & k=2m+1\end{cases}$$

ונקבל:

$$||\gamma\left(\frac{1}{k}\right)-\gamma\left(\frac{1}{k+1}\right)||\geq|f\left(\frac{1}{k}\right)-f\left(\frac{1}{k+1}\right)|\geq\frac{1}{k}$$

ואם נתבונן בחלוקות: $T_n: 0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\cdots<\frac{1}{2}<1$ אורך הקו הפוליגונלי המתאים לחלוקה זו יהיה גדול מהסכום:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

שמתבדר לאינסוף כאשר $n\to\infty$. לכן העקומה אינה בעלת אורך.

הערה 4.2 נתבונן בשתי העקומות:

$$\alpha\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right),t\in\left[0,2\pi\right]$$

$$\beta\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right),t\in\left[0,4\pi\right]$$

מבחינה גרפית, מדובר על אותן העקומות, אך האורך שלהן לפי הנוסחה שונה. זאת, מכיוון ש־β עוברת בכל נקודה במעגל פעמיים (ומתקבל מעגל "עם שתי שכבות").
לעומת זאת, העקומה:

$$\gamma\left(t\right)=\left(\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}\right),t\in\left[0,4\pi\right]$$

מתארת את אותה העקומה בדיוק כמו α. לכן:

1. נתייחס אל פרמטריזציות שמתארות את אותו הגרף אך נותנות אורך שונה כמתארות עקומות שונות.
2. פרמטריזציות שונות יכולות לתאר את אותה העקומה (עם אותו האורך).

4.1.3 הפרמטריזציה הטבעית

הגדרה 4.3 לכל עקומה קיימות הרבה פרמטריזציות שונות. **הפרמטריזציה הטבעית** נתונה על ידי הנוסחה:

$$s\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}\left\Vert \gamma'\left(x\right)\right\Vert dx$$

כאשר $\gamma\left(t\right)$ היא פרמטריזציה כלשהי של העקומה.
זו s כפונקציה של t. ממנה מחלצים את t כפונקציה של s ומציבים ב-γ.
פרמטריזציה זו נקראת גם פרמטריזציית אורך קשת (חשבו על הנוסחה לחישוב אורך עקומה) וגם פרמטריזציה במהירות יחידה.
בפרמטריזציה זו, $\left\Vert \gamma'\left(t\left(s\right)\right)\right\Vert =\left\Vert \gamma'\left(s\right)\right\Vert =1$, כלומר המשיק הוא תמיד משיק יחידה.
לא תמיד פשוט למצוא פרמטריזציה טבעית.

<u>תרגיל:</u>

מצאו פרמטר טבעי לעקומות המישוריות הבאות:

א. $y=mx+n$.

<u>פתרון:</u>

קודם כל, ניקח פרמטריזציה כלשהי של העקומה, למשל:

$$\gamma\left(t\right)=\left(t,mt+n\right)$$

אם כן: $\gamma'\left(t\right)=\left(1,m\right)$ ולכן: $\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert =\sqrt{1+m^{2}}$. לכן:

$$s\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}\left\Vert \gamma'\left(x\right)\right\Vert dx=\int\limits_{0}^{t}\sqrt{1+m^{2}}dx=t\sqrt{1+m^{2}}$$

ולכן אם נבטא את t כפונקציה של s נקבל:

$$t\left(s\right)=\frac{s}{\sqrt{1+m^{2}}}$$

והפרמטריזציה החדשה תהיה:

$$\gamma\left(s\right)=\left(\frac{s}{\sqrt{1+m^{2}}},\frac{ms}{\sqrt{1+m^{2}}}+n\right)$$

ואפשר לראות שאכן $\left\Vert \gamma'\left(s\right)\right\Vert =1$.

ב. $y=x^{2}$.

<u>פתרון:</u>

שוב, ניקח פרמטריזציה כלשהי של העקומה, למשל:

$$\gamma\left(t\right)=\left(t,t^{2}\right)$$

אם כן: $\gamma'(t)=(1,2t)$ ולכן $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$. לכן:

$$s(t)=\int_0^t\|\gamma'(x)\|\,dx=\int_0^t\sqrt{1+4x^2}dx$$

זהו אינטגרל טריוויאלי. ונקבל:

$$s(t)=t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}+\frac{\ln\left(t+\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\right)}{4}$$

ולא פשוט להפוך ולבטא את t כפונקציה של s. אם כן, פרמטריזציה טבעית היא לא תמיד קלה להשגה.

4.2 עקמומיות (של עקומות מישוריות)

הגדרה 4.4 תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה חלקה ורגולרית. נגדיר שני וקטורים:

א. משיק היחידה לעקומה γ הוא: $\hat{T}(s)=\gamma'(s)$, והוא מקיים: $\left\|\hat{T}\right\|=1$.

ב. נורמל היחידה, $\hat{N}(s)$ הוא וקטור המקיים:

1. $\hat{N}\perp\hat{T}$.
2. $\left(\hat{T},\hat{N}\right)$ בסיס חיובי, כלומר: $\det\left(\hat{T},\hat{N}\right)=1$.

לכל פרמטריזציה, לאו דווקא טבעית, אפשר להגדיר:

$$\hat{N}(t)=R_{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

עקמומיות:

בהינתן עקומה, אנו מעוניינים לדעת עד כמה היא, ובכן, עקומה.

העקמומיות היא מדד המודד זאת. איך נחליט עד כמה כל עקומה באמת עקומה?

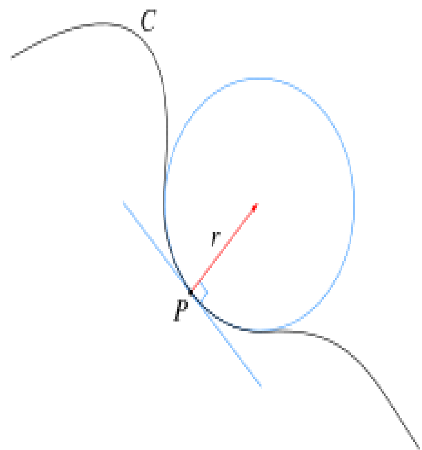
דרך א': נתחיל בקו ישר. מה תהיה העקמומיות של קו ישר? קו ישר כלל אינו עקום, הרי הוא ישר! לכן העקמומיות של קו ישר היא 0.

העקומה הבאה בתור אחרי קו ישר היא מעגל. עד כמה מעגל עקום? נשים לב שככל המעגל גדול יותר, הוא פחות עקום; ככל שהמעגל קטן יותר, אנחנו מתעקמים יותר מהר לאורך המעגל.

אפשר להסתכל על זה גם באופן הבא - ככל שהמעגל יותר גדול, לוקאלית הוא יותר דומה לקו ישר, ולכן העקמומיות שלו קטנה.

לפיכך, עקמומיותו של מעגל צריכה להיות מוגדרת ביחס הפוך להיקפו של המעגל, וההגדרה הטבעית ביותר לעקמומיות של מעגל עם רדיוס R, אם כן, תהיה $\frac{1}{R}$.

איך נכליל זאת לעקומה כלשהי? בכל נקודה על העקומה, p, נקרב את העקומה על ידי מעגל נושק (אסקלטורי) C_p עם רדיוס r_p, והעקמומיות בנקודה תהיה $k\left(p\right)=\frac{1}{r_p}$.
שימו לב שהעקמומיות תלויה בנקודה (בניגוד לקו הישר והמעגל בהם העקמומיות קבועה).



הרדיוס r_p מכונה **רדיוס העקמומיות** ומרכז המעגל הנושק מכונה **מרכז העקמומיות**.

דרך ב': אפשר להגדיר עקמומיות כ"מהירות שבה העקומה משנה כיוון".

אם כך, אפשר במקום להסתכל על מהירות השינוי של כיוון העקומה, להסתכל על מהירות כיוון השינוי של הוקטורים המשיקים.

כדי להגדיר עקמומיות כך, יש בראש ובראשונה לשים לב שהמהירות לאורך כל העקומה שווה, אחרת אין משמעות למדידת מהירות השינוי. למשל, אם פרמטריזציה מסוימת של המעגל מתקדמת לאורך הקשת התחתונה במהירות מסוימת ולאורך הקשת העליונה במהירות כפולה, ברור שהשינוי בקשת העליונה יהיה יותר מהיר, למרות שגיאומטרית אין כל הבדל בין הקשתות! לכן, אם אנו ניגשים לעקמומיות בדרך זו, עלינו לעבוד עם הפרמטריזציה הטבעית, שהיא (כמו שאמרנו) פרמטריזציה במהירות יחידה.

אם כן, הוקטורים המשיקים הם $\gamma'\left(s\right)$, ולכן השינוי בהם ניתן על ידי נגזרתם, הלא היא $\gamma''\left(s\right)$. אנו רוצים להגדיר את העקמומיות כמהירות בשינוי, כלומר את הגודל של הוקטורים $\gamma''\left(s\right)$ ולכן נגדיר:

$$k\left(s\right)=\left\|\gamma''\left(s\right)\right\|$$

די אינטואיטיבי בסך הכל.

משפט 4.5 משוואות פרנה:

משוואות פרנה ($Frenet$) מבטאות לנו את הקשר בין העקמומיות לבין הוקטורים המשיק והנורמל:

$$\begin{cases} \hat{T}'(s) = k(s)\,\hat{N}(s) \\ \hat{N}'(s) = -k(s)\,\hat{T}(s) \end{cases}$$

ואם נכתוב זאת בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}'(s) \\ \hat{N}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}(s) \\ \hat{N}(s) \end{pmatrix}$$

שימו לב שהפרמטריזציה טבעית. כמו כן, שימו לב שמטריצת המקדמים במשוואות היא אנטי־סימטרית.

הגדרה 4.6 ראינו שאם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית, $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.
כאשר העקומה נתונה בפרמטריזציה כלשהי, $\gamma(t)$, העקמומיות נתונה על ידי הנוסחה:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

כמו שהגדרנו בדרך א', רדיוס העקמומיות של עקומה נתון על ידי הנוסחה:

$$r(t) = \frac{1}{k(t)}$$

ומרכז העקמומיות נתון על ידי הנוסחה:

$$c(t) = \gamma(t) + r(t) \cdot \hat{N}(t)$$

זכרו שהרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, התבוננו באיור למעלה והחכימו.

<u>תרגיל:</u>

תהי γ עקומה (חלקה ורגולרית) בעלת עקמומיות קבועה. תארו את γ.

<u>פתרון:</u>

אם העקמומיות היא $k = 0$, נקבל שמתקיים:

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = 0 \longrightarrow \gamma''(s) = 0$$

לכן $\gamma'(s) = c$ ולכן $\gamma(s) = ct + d$, וזהו קו ישר.

אם $k \neq 0$, נניח שמתקיים $k > 0$. נתבונן במרכזי העקמומיות:

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k}\hat{N}(s)$$

נראה שהפונקציה c קבועה, על ידי כך שנראה שנגזרתה שווה לאפס:

$$c'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{k}\hat{N}'(s)$$

נזכור ש: $\gamma'(s) = \hat{T}(s)$, ולפי משוואות פרנה: $\frac{1}{k}\hat{N}'(s) = -\hat{T}(s)$, ולכן:

$$c'(s) = \hat{T}(s) - \hat{T}(s) = 0$$

ולכן $c(s) = a$ קבועה. אם כן:

$$\gamma(s) + \frac{1}{k}\hat{N}(s) = a$$

$$\gamma(s) - a = \frac{1}{k}\hat{N}(s)$$

נפעיל נורמה על שני האגפים ונקבל:

$$\|\gamma(s) - a\| = \left\|\frac{1}{k}\hat{N}(s)\right\| = \frac{1}{|k|}$$

מכיוון שהנורמל הוא נורמל יחידה. אם כן, $\gamma(s)$ מתארת אוסף נקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה, ולכן $\gamma(s)$ מעגל (שימו לב מהו הרדיוס שלו).

במקרה בו $k < 0$ ניקח $c(s) = \gamma(s) - \frac{1}{k}\hat{N}(s)$ ונקבל את אותה התוצאה.

מסקנה 4.7 רק לקו ישר ולקשת מעגל יש עקמומיות קבועה.

טענה 4.8 כלל לייבניץ:

$$\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle g', f\rangle$$

עבור $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. נוכיח זאת.

נסמן: $f = (f_1(t), \ldots, f_n(t)), g = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$. כעת:

$$\langle f, g\rangle' = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} (f_i g_i)' = \sum_{i=1}^{n} (f_i' g_i + g_i' f_i) = \langle f', g\rangle + \langle g', f\rangle$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ עקומה שנמצאת כולה בתוך מעגל ברדיוס R.

הוכיחו שאם העקומה סגורה, קיים $s \in [0,L]$ עבורו $|k(s)| \geq \frac{1}{R}$.

<u>פתרון:</u>

ההגיון הוא פשוט. אם העקומה סגורה, היא צריכה לחזור לנקודה בה היא התחילה.

מכיוון שהיא בתוך המעגל, היא צריכה באיזשהו שלב לבצע עיקול חד יותר מהמעגל, ושם העקמומיות יותר גדולה מעקמומיותו של המעגל, שהיא כידוע $\frac{1}{R}$.

אם כך, נתבונן בביטוי:

$$\frac{d}{ds}\left(\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma'\left(s\right)\right\rangle\right)=\left\langle \gamma'\left(s\right),\gamma'\left(s\right)\right\rangle+\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma''\left(s\right)\right\rangle=\left\Vert \gamma'\left(s\right)\right\Vert^{2}+\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma''\left(s\right)\right\rangle$$

אם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית, $\left\Vert \gamma'\left(s\right)\right\Vert = 1$, ולכן:

$$L=\int_{0}^{L}ds=\int_{0}^{L}\left\Vert \gamma'\left(s\right)\right\Vert^{2}ds=\left|\int_{0}^{L}\left(\frac{d}{ds}\left(\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma'\left(s\right)\right\rangle\right)-\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma''\left(s\right)\right\rangle\right)ds\right|=$$

$$=\left|\int_{0}^{L}\frac{d}{ds}\left(\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma'\left(s\right)\right\rangle\right)ds-\int_{0}^{L}\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma''\left(s\right)\right\rangle ds\right|=$$

כעת:

$$\int_{0}^{L}\frac{d}{ds}\left(\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma'\left(s\right)\right\rangle\right)ds=\left\langle \gamma\left(L\right),\gamma'\left(L\right)\right\rangle-\left\langle \gamma\left(0\right),\gamma'\left(0\right)\right\rangle=0$$

מכיוון שהעקומה סגורה. נישאר, אם כך, עם:

$$L=\left|\int_{0}^{L}\left\langle \gamma\left(s\right),\gamma''\left(s\right)\right\rangle ds\right|=\left|\int_{0}^{L}\left\langle \gamma\left(s\right),\hat{T}'\left(s\right)\right\rangle ds\right|=\left|\int_{0}^{L}\left\langle \gamma\left(s\right),k\left(s\right)\hat{N}\left(s\right)\right\rangle ds\right|=$$

$$=\left|\int_{0}^{L}k\left(s\right)\left\langle \gamma\left(s\right),\hat{N}\left(s\right)\right\rangle ds\right|\leq\int_{0}^{L}\left|k\left(s\right)\right|\cdot\left|\left\langle \gamma\left(s\right),\hat{N}\left(s\right)\right\rangle\right|ds$$

לפי אי־שוויון קושי שוורץ:

$$\leq\int_{0}^{L}\left|k\left(s\right)\right|\cdot\left\Vert \gamma\left(s\right)\right\Vert\cdot\left\Vert \hat{N}\left(s\right)\right\Vert ds$$

הפרמטריזציה טבעית ולכן $\left\|\hat{N}(s)\right\| = 1$.
העקומה נמצאת כולה בתוך המעגל ולכן $\|\gamma(s)\| \leq R$. נקבל:

$$L \leq \int_0^L R\,|k(s)|\,ds$$

כעת, נניח בשלילה שלכל $s \in [0, L]$ מתקיים: $|k(s)| < \frac{1}{R}$. לפיכך:

$$L \leq \int_0^L R\,|k(s)|\,ds < \int_0^L R \cdot \frac{1}{R} = L$$

וסתירה, ולכן קיים $s \in [0, L]$ המקיים את הדרוש.

<u>תרגילון:</u>

מצאו את העקמומיות של עקומה הנתונה על ידי גרף הפונקציה: $y = f(x)$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של העקומה היא:

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

לכן: $\gamma'(t) = (1, f'(t)), \gamma''(t) = (0, f''(t))$ ולפי הנוסחה:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \cdots = \frac{f''(t)}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>תרגיל:</u>

איך משפיע היפוך כיוון התנועה על העקמומיות של עקומה $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$?

<u>פתרון:</u>

נגדיר את העקומה בכיוון ההפוך:

$$\delta(t) = \gamma(T - t)$$

לפי כלל השרשרת:

$$\delta'(t) = (T - t)' \cdot \gamma'(T - t) = -\gamma'$$

$$\delta'' = \gamma''$$

ולכן לפי הנוסחה:

$$k_{\delta}=\frac{\det\left(\delta'\left(t\right),\delta''\left(t\right)\right)}{\left\|\delta'\left(t\right)\right\|^{3}}=\frac{\det\left(-\gamma'\left(t\right),\gamma''\left(t\right)\right)}{\left\|-\gamma'\left(t\right)\right\|^{3}}=-\frac{\det\left(\gamma'\left(t\right),\gamma''\left(t\right)\right)}{\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|^{3}}=-k_{\gamma}$$

נזכור שפעולת כפל שורה/עמודה בקבוע מכפילה את הדטרמיננטה בקבוע (במקרה שלנו, -1).

מסקנה 4.9 היפוך כיוון העקומה הופך את סימן העקמומיות.

4.2.1 חישוב עקמומיות בצורה סתומה

אנו יודעים שאפשר להציג עקומות גם בצורה סתומה: $F\left(x,y\right)=0$, ולא רק על ידי פרמטריזציה.

כאשר עקומה נתונה בצורה סתומה, אפשר לחשב את העקמומיות על ידי הנוסחה:

$$|k|=\left|\nabla\cdot\frac{\nabla F\left(x,y\right)}{\left\|\nabla F\left(x,y\right)\right\|}\right|$$

כלומר דיברגנץ של הגרדיאנט המנורמל.

שימו לב שאנו יכולים לחשב רק את העקמומיות בערך מוחלט ולא את העקמומיות ממש.

זאת מכיוון שבצורה סתומה, בניגוד לפרמטריזציה, אין לנו ידע על כיוון ההתקדמות של העקומה (אין כזה), וראינו שמה שקובע את סימן העקמומיות הוא כיוון ההתקדמות של העקומה.

אפשר לחשב את העקמומיות בצורה נוספת, על ידי נוסחת בייטמן ($Bateman$):

$$|k|=\left|\frac{D_{B}\left(F\right)}{\left\|\nabla F\left(x,y\right)\right\|^{3}}\right|=\frac{\left|F_{xx}F_{y}^{2}-2F_{xy}F_{x}F_{y}+F_{yy}F_{x}^{2}\right|}{\left(\sqrt{F_{x}^{2}+F_{y}^{2}}\right)^{3}}$$

האופרטור D_B נקרא אופרטור בייטמן.

את אופרטור בייטמן אפשר גם לכתוב בצורה מטריציונית:

$$D_{B}\left(F\right)=-\begin{vmatrix}0 & F_{x} & F_{y}\\ F_{x} & F_{xx} & F_{xy}\\ F_{y} & F_{yx} & F_{yy}\end{vmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את העקמומיות המקסימלית של הפרבולה $y=x^2$.

פתרון:

אפשר להגדיר פרמטריזציה $\gamma(t)=\left(t,t^2\right)$, ולחשב לפי הנוסחה $k(t)=\frac{\det\left(\gamma'(t),\gamma''(t)\right)}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

נשתמש בנוסחת בייטמן. הפונקציה F היא: $F(x,y)=y-x^2=0$. כעת:

$$F_x=-2x, F_y=1$$

$$F_{xx}=-2, F_{xy}=0, F_{yy}=0$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{|-2|}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3}=\frac{2}{\left(4x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

וקל לראות שהעקמומיות המקסימלית מתקבלת כאשר $x=0$ (למתקדמים: גזרו והשוו לאפס), וערכה הוא 2.

תרגילים נוספים

1. חשבו את אורכה של כל אחת מהעקומות הבאות (הניחו שהן בעלות אורך).

(א) $\gamma(t)=\left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$, כאשר $a>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$.

(ב) $\gamma(t)=(2a\cos t+a\cos 2t, 2a\sin t-a\sin 2t)$, כאשר $a>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$.

(ג) $\gamma(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, כאשר $a>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$.

(ד) $\gamma(t)=(2a\cos t-a\cos 2t, 2a\sin t-a\sin 2t)$, כאשר $a>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$.

2. מצאו פרמטריזציה טבעית לעקומות הבאות:

(א) $\gamma(t)=(1+2\cos t, -3+2\sin t)$.

(ב) $\gamma(t)=\left(t,\frac{1}{3}\sqrt{\left(2+t^2\right)^3}\right)$.

(ג) $\gamma(t)=\left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$, עבור $a>0$.

3. חשבו את עקמומיותן של העקומות הבאות. פשטו ככל הניתן.

(א) $\gamma(t)=(1+2\cos t, -3+2\sin t)$.

(ב) $\gamma(t)=\left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$.

(ג) $\gamma(s)=\left(\int_0^s\cos(\phi(u))\,du,\int_0^s\sin(\phi(u))\,du\right)$ כאשר $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה. הראו שהפרמטריזציה אכן טבעית.

4. מצאו עקומה שעקמומיותה היא $s^2+s^3+s^4$.

5. תהי $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ עקומה רגולרית סגורה הנתונה בפרמטריזציה טבעית. הוכיחו שאם העקמומיות $k(s)$ מונוטונית, היא קבועה.

6. תהי $\gamma:[a,b]\to S^2$ עקומה רגולרית, כאשר S^2 היא ספירת היחידה (זו עקומה מרחבית שתמונתה מוכלת בספירה). הוכיחו ש: $\gamma\perp\gamma'$.

7. חשבו את העקמומיות של העקומות הבאות:

(א) אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(ב) פרבולה חצי־קוביייתית: $x^3-y^2=0$.

פתרונות

1. נשתמש בנוסחה: $L=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=\left(-3a\cos^2t\sin t,3a\sin^2t\cos t\right)$$

ולכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4t\sin^2t+9a^2\sin^4t\cos^2t}dt=3a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2t\sin^2t}dt=$$

לפי הזהות $\sin^2t+\cos^2t=1$. לפי הזהות $\sin 2t=2\cos t\sin t$ נקבל:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt=$$

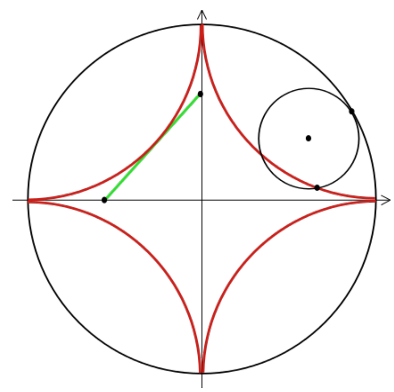
נחלק את האינטגרל לפי תחומי החיוביות והשליליות של $\sin 2t$:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2tdt+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\sin 2tdt\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים שווה ל־1, ולכן:

$$L=\frac{3a}{2}\cdot 4=6a$$

עקומה זו נקראת **אסטרואידה.** אסטרואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 4 מרדיוס המעגל הפנימי.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2a\sin t - 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t + 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2\left(1 + \sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t\right)}dt =$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. לפי זהויות לזווית כפולה:

$$\sin 2t = 2\cos t\sin t, \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt =$$

כעת, נציב $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ ונקבל:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{-4\cos^3 t + 3\cos t + 1}dt =$$

נשים לב שמתקיים: $-4\cos^3 t + 3\cos t + 1 \;=\; (1-\cos t)\,(2\cos t + 1)^2$,
ולכן:

$$2\sqrt{2}a\int\limits_0^{2\pi}|2\cos t + 1|\sqrt{1-\cos t}dt =$$

את האינטגרל אפשר לפתור באמצעות זהות לזווית כפולה:

$$\cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$$

ואז: $\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, ונקבל את האינטגרל:

$$4a\int\limits_0^{2\pi}\left|(2\cos t + 1)\sin\frac{t}{2}\right|dt =$$

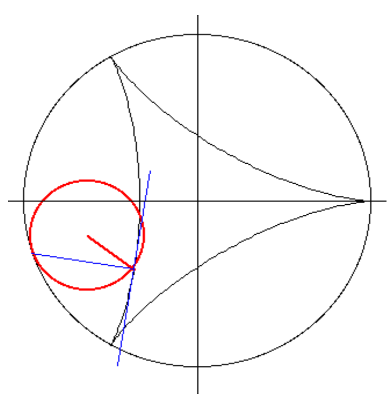
לפי זהות לזווית כפולה: $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$, ולכן:

$$4a\int\limits_0^{2\pi}\left|\left(4\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

לאחר שנפריד את הערך המוחלט לפי תחומים, נציב $u = \cos\frac{t}{2}$ ונקבל $du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$.
מכאן האינטגרל פשוט, ולאחר שחוזרים חזרה ל–t הפתרון הוא $\frac{2}{3}\sqrt{1-\cos 3t}\cot\left(\frac{3t}{2}\right)$.
בתחום שלנו, בכל אופן, נקבל:

$$L = 4a\cdot 4 = 16a$$

עקומה זו נקראת **דלתואידה.** דלתואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 3.



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (a - a\cos t, a\sin t)$$

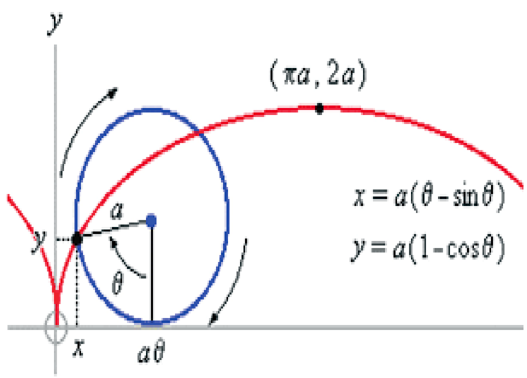
לכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. לפי זהות לזווית כפולה: $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$,
ולכן:

$$= 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 4a \cdot 2 = 8a$$

עקומה זו נקראת **ציקלואידה.** ציקלואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



(ד) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2a\sin t + 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן, בדומה לדלתואידה:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t - 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2(1 + \sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t)}dt =$$

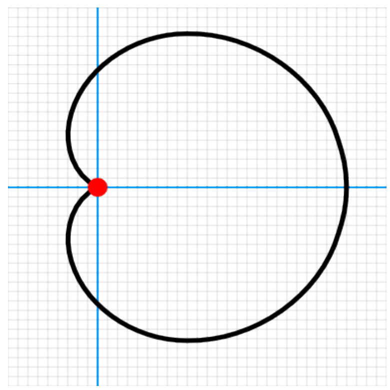
לפי זהויות של זווית כפולה:

$$= 2\sqrt{2}a \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{-2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt = 2\sqrt{2}a \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} =$$

בדומה לציקלואידה, האינטגרל הזה שווה ל־$4\sqrt{2}$, ולכן:

$$L = 2\sqrt{2}a \cdot 4\sqrt{2} = 16a$$

עקומה זו נקראת **קרדיואידה.** קרדיואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) סביב מעגל אחר בעל רדיוס זהה.



מומלץ לחפש ברחבי המרשתת אנימציות המתארות את היווצרות העקומות הללו.

2. נשתמש בנוסחה ל־s וננסה להפוך את הפונקציה שנקבל.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

ולכן:

$$s(t) = \int\limits_{0}^{t} \|\gamma'(x)\| dx = \int\limits_{0}^{t} \sqrt{4\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx = \int\limits_{0}^{t} 2dx = 2t$$

לכן, הפרמטר הטבעי יהיה $t = \frac{s}{2}$, והפרמטריזציה הטבעית:

$$\gamma(s) = \left(1 + 2\cos\frac{t}{2}, -3 + 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(1, t\sqrt{2+t^2}\right)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{1+x^2\left(2+x^2\right)} dx = \int_0^t \left(1+x^2\right) dx = \frac{t^3}{3} + t$$

עלינו למצוא את t כביטוי של s.
נתבונן במשוואה:

$$\frac{t^3}{3} + t - s = 0$$

ונפתור אותה באמצעות הנוסחה הכללית למשוואה ממעלה שלישית. הפתרון הממשי היחיד הוא:

$$t = \sqrt[3]{\frac{3s}{2} + \sqrt{1+\frac{9s^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{3s}{2} - \sqrt{1+\frac{9s^2}{4}}}$$

וזהו הפרמטר הטבעי. כדי למצוא את הפרמטריזציה הטבעית, נציב זאת ב- $\gamma(t)$.

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(1, \sinh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}} dx = \int_0^t \cosh\frac{x}{a} dx = a\sinh\frac{t}{a}$$

לפי הזהות $1+\sinh^2 t = \cosh^2 t$.
נחלץ את t ונקבל: $t(s) = a\cdot arcsinh\frac{s}{a}$. אם נציב זאת ב- $\gamma(t)$, לאחר שנשתמש בזהויות של הפונקציות ההיפרבוליות נקבל:

$$\gamma(s) = \left(a\cdot arcsinh\frac{s}{a}, a\sqrt{a^2+s^2}\right)$$

וזוהי הפרמטריזציה הטבעית.

3. אם ניתן, נשתמש בנוסחה לפרמטריזציה טבעית. אחרת, נשתמש בנוסחה הכללית.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'\left(t\right)=\left(-2\sin t,2\cos t\right)$$

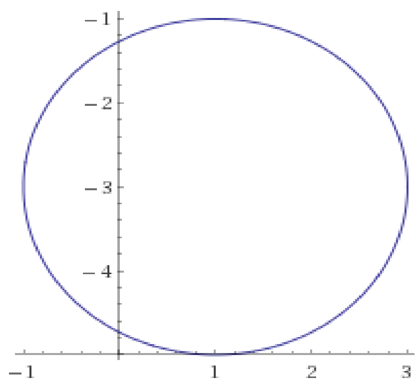
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''\left(t\right)=\left(-2\cos t,-2\sin t\right)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t)=\frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\left\|\gamma'(t)\right\|^{3}}=\frac{\begin{vmatrix}-2\sin t & -2\cos t\\ 2\cos t & -2\sin t\end{vmatrix}}{\left(4\cos^{2}t+4\sin^{2}t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

זהו מעגל שרדיוסו 2, ולכן הגיוני שעקמומיותו תהיה $\frac{1}{2}$.



(t from 0 to 2π)

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'\left(t\right)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

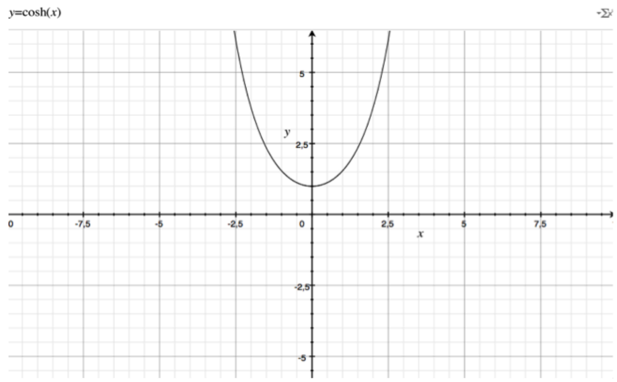
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''\left(t\right)=\left(0,\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t)=\frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\left\|\gamma'(t)\right\|^{3}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ \sinh\frac{t}{a} & \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\end{vmatrix}}{\left(1+\sinh^{2}\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}}{\cosh^{3}\frac{t}{a}}=\frac{1}{a\cosh^{2}\frac{t}{a}}$$

העקומה נראית כך:



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)))$$

ולכן:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\phi(s)) + \sin^2(\phi(s))} = 1$$

וזו אכן פרמטריזציה טבעית.

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה: $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(s) = (-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s), \cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))$$

ולכן:

$$k(s) = \sqrt{(-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2 + (\cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2} = \phi'(s)$$

4. נתבונן בפונקציה $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\phi(s) = \frac{s^5}{5} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3}$$

לפי הסעיף האחרון בשאלה הקודמת, נקבל שעקמומיותה של העקומה:

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))\, du, \int_0^s \sin(\phi(u))\, du\right)$$

היא $\phi'(s)$, כלומר $s^4 + s^3 + s^2$ כנדרש.

5. נניח בה"כ שהעקמומיות מונוטונית עולה.
לכן, לכל $0 \le a \le b \le L$ מתקיים: $k(a) \le k(b)$.
העקומה סגורה, ובפרט $k(0) = k(L)$.
נקבל שלכל $0 \le a \le L$ מתקיים: $k(a) = k(0)$, והעקמומיות קבועה.

6. $\gamma(t) \in S^2$ לכל $t \in [a,b]$, ולכן $\|\gamma(t)\| = 1$. לכן גם $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$.
לפיכך, אם נגזור נקבל:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle' = (1)' = 0$$

ומצד שני:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle' = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle$$

ונקבל: $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$ לכל $t \in [a,b]$, כלומר $\gamma \perp \gamma'$.

7. נשתמש בנוסחת בייטמן.

(א) הפונקציה היא:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, F_y = \frac{2y}{b^2}$$

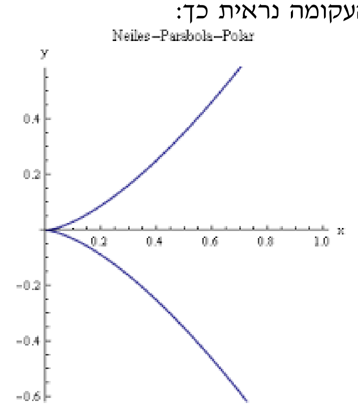
$$F_{xx} = \frac{2}{a^2}, F_{xy} = 0, F_{yy} = \frac{2}{b^2}$$

ולכן:

$$|k| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} = \frac{\left|\frac{2}{a^2} \cdot \frac{4y^2}{b^4} + \frac{2}{b^2} \cdot \frac{4x^2}{a^4}\right|}{\left(\sqrt{\frac{4y^2}{b^4} + \frac{4x^2}{a^4}}\right)^3} =$$

$$= \frac{\frac{8}{a^2b^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)}{8\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}\right)^3} = \frac{1}{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}\right)^3}$$

(ב) העקומה נראית כך:



הפונקציה היא:

$$F\left(x,y\right)=x^{3}-y^{2}=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_{x}=3x^{2},F_{y}=-2y$$

$$F_{xx}=6x,F_{xy}=0,F_{yy}=-2$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_{y}^{2}-2F_{xy}F_{x}F_{y}+F_{yy}F_{x}^{2}\right|}{\left(\sqrt{F_{x}^{2}+F_{y}^{2}}\right)^{3}}=\frac{\left|24xy^{2}-18x^{4}\right|}{\left(\sqrt{9x^{4}+4y^{2}}\right)^{3}}$$

שימו לב שאפשר למצוא פרמטריזציה של העקומות ולחשב את העקמומיות לפי הפרמטריזציה.

5 התבנית היסודית הראשונה

5.1 מבוא

אינטואיטיבית, משטח הוא צורה דו־מימדית (ללא "נפח") במרחב, שאין לה "פינות", נקודות לא חלקות.

הגדרה 5.1 מפה רגולרית היא מפה חלקה $\varphi:U\to\mathbb{R}^{3}$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^{2}$ שדרגת היעקוביאן שלה מקסימלית בכל נקודה (כלומר, שווה ל־2).

משטח הוא תת קבוצה $M \subset \mathbb{R}^3$, כך שלכל $x \in M$ קיימת מפה $\varphi_x : U_x \to M$ ש-x נמצא בטווח שלה .

אוסף מפות כאלו $\{\varphi_x\}$ נקרא אטלס.

הצגה כזו נקראת פרמטריזציה של המשטח.

אפשר להגדיר גם משטח בצורה סתומה: $F(x,y,z) = 0$.

<u>לדוגמה:</u>

ספירת היחידה מוגדרת על ידי הפרמטריזציה הבאה:

$$f(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

כאשר $(\theta,\phi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$. אלו הקואורדינטות הכדוריות.

מאידך גיסא, אפשר להציגה בצורה סתומה:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

גליל שמרכזו ציר ה-z ורדיוסו 1 אפשר להציג בעזרת הפרמטריזציה הבאה:

$$r(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

כאשר $(u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$.

כמו כן, אפשר להציגו בצורה סתומה, כך:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

5.2 המישור המשיק והגדרת התבנית היסודית הראשונה

נסמן ב-$T_p(M)$ את המישור המשיק למשטח M בנקודה p.

המישור המשיק הוא אוסף כל הוקטורים המשיקים לעקומות העוברות דרך p ונמצאות כולן על M.

אפשר לכתוב:

$$T_p(M) = \{\gamma'(0) \,|\gamma : |-a,a| \to M, \gamma(0) = p\}$$

$T_p(M) \subseteq \mathbb{R}^3$, אך מכיוון שזהו מישור ברור ש: $T_p(M) \cong \mathbb{R}^2$.

אם המפה רגולרית, אז:

$$T_p\left(M\right)=span\left\{\varphi_u\left(p\right),\varphi_v\left(p\right)\right\}$$

אם כן, לכל וקטור $w\in T_p\left(M\right)$ יש הצגה בקואורדינטות לפי הבסיס $\left\{\varphi_u\left(p\right),\varphi_v\left(p\right)\right\}$:

$$w=w^1\varphi_u\left(p\right)+w^2\varphi_v\left(p\right)$$

ואם כן, נוכל להגדיר איזומורפיזם $\Phi:\mathbb{R}^2\to T_p\left(M\right)$ על ידי:

$$\Phi((w^1,w^2))=w^1\varphi_u\left(p\right)+w^2\varphi_v\left(p\right)=\left(\varphi_u\left(p\right),\varphi_v\left(p\right)\right)\cdot\begin{pmatrix}w^1\\w^2\end{pmatrix}=J_\varphi\left(p\right)\cdot\begin{pmatrix}w^1\\w^2\end{pmatrix}$$

זו היעקוביאן.

מכיוון שהיעקוביאן מוגדרת כפונקציה $J_\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ והתחום והטווח אצלנו מעט שונים, להעתקה זו אנו קוראים הדיפרנציאל, ומסמנים אותה ב-$d_q\varphi$, כאשר q היא מקור של p.

שימו לב שזהו אכן איזומורפיזם (זכרו שכל וקטור ניתן להצגה **יחידה** כצירוף ליניארי של איברי הבסיס).

משפט 5.2 לכל עקומה מישורית γ מתקיים:

$$d_q\varphi\left(\gamma'\left(0\right)\right)=\left(\varphi\circ\gamma\right)'\left(0\right)$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי:

$$f\left(x,y\right)=\left(x+\sin y,\ln\left(x^2+1\right)\right)$$

חשבו את $d_pf\left(v\right)$ לכל v, כאשר $p=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>פתרון:</u>

דרך א': נפתור כמו באינפי 3. נחשב את היעקוביאן:

$$J_f=\begin{pmatrix}1&\cos y\\\frac{2x}{x^2+1}&0\end{pmatrix}$$

ובנקודה שלנו:

$$J_f\left(p\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\\1&0\end{array}\right)$$

ולכן:

$$d_pf\left(v\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\\1&0\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}v^1\\v^2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}v^1\\v^1\end{array}\right)$$

כאשר $v=\left(\begin{array}{c}v^1\\v^2\end{array}\right)$.

דרך ב': נשתמש במשפט שלנו.

אנו רוצים עקומה $\gamma\left(t\right)$ המקיימת:

1. $\gamma\left(0\right)=p$.
2. $\gamma'\left(0\right)=v$.

אם כן, הכי פשוט לקחת את העקומה:

$$\gamma\left(t\right)=tv+p=\left(tv^1+1,tv^2+\frac{\pi}{2}\right)$$

כעת,

$$\left(f\circ\gamma\right)\left(t\right)=f\left(tv^1+1,tv^2+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+tv^1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+tv^2\right),\ln\left(2+2tv^1+t^2v^{1^2}\right)\right)$$

ולכן:

$$\left(f\circ\gamma\right)'\left(t\right)=\left(v^1+v^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+tv^2\right),\ln\left(\frac{2v^1+2tv^{1^2}}{2+2tv^1+t^2v^{1^2}}\right)\right)$$

ואם נציב $t=0$ נקבל: $\left(f\circ\gamma\right)'\left(0\right)=\left(v^1,v^1\right)$.

לפי המשפט:

$$d_pf\left(v\right)=d_pf\left(\gamma'\left(0\right)\right)=\left(f\circ\gamma\right)'\left(0\right)=\left(\begin{array}{c}v^1\\v^1\end{array}\right)$$

ואכן קיבלנו את אותה תוצאה.

הגדרה 5.3 התבנית היסודית הראשונה:

נגדיר תבנית בילינארית $I : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$I(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$$

אם נסתכל על הוקטורים u_1, u_2 כצירופים ליניאריים של φ_u, φ_v:

$$u_1 = a^1\varphi_u + a^2\varphi_v$$
$$u_2 = b^1\varphi_u + b^2\varphi_v$$

נקבל (מליניאריות המכפלה הפנימית):

$$I(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle = a^1b^1g_{11} + a^1b^2g_{12} + a^2b^1g_{21} + a^2b^2g_{22}$$

כאשר: $g_{11} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, g_{12} = g_{21} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, g_{22} = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

אם כן, אפשר לומר שהתבנית I מושרית מהמטריצה:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

כלומר: $I(a, b) = b^tGa$, כאשר $b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}$.

בליניארית 2 קראנו למטריצה הזו מטריצת גראם.

G נקראת **המטריקה** (הרימנית), g_{ij} נקראים **מקדמי המטריקה**.

מה אפשר לעשות עם התבנית היסודית הראשונה? לא מעט דברים, כפי שנראה בהמשך.

5.3 שימושים בסיסיים לתבנית היסודית הראשונה

5.3.1 חישוב אורך עקומה על משטח

תהי עקומה מישורית חלקה $\gamma : [a, b] \to U$, ויהי M משטח המוגדר על ידי $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$.

אפשר להגדיר $\beta : |a, b| \to M$ על ידי:

$$\beta = \varphi \circ \gamma$$

זו עקומה מרחבית שנמצאת על M.

אנו יודעים שהאורך שלה נתון על ידי הנוסחה:

$$L(\beta) = \int_a^b \|\beta'(t)\|\,dt$$

מתקיים:

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{(\gamma'(t))^t G(\gamma'(t))}$$

ולכן אפשר לחשב את אורכה של β על ידי הנוסחה:

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{(\gamma'(t))^t G(\gamma'(t))}dt$$

<u>תרגיל:</u>

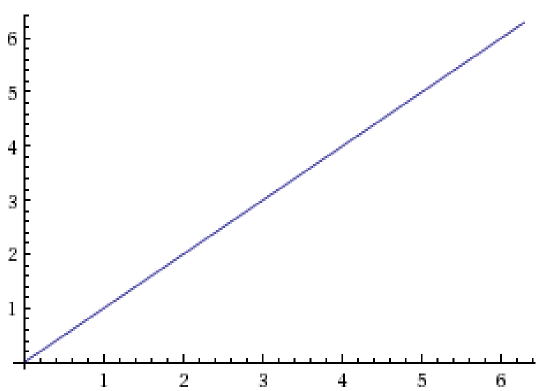
נסמן: $\Omega = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u,v \in [0,2\pi]\right\}$.

נגדיר עקומה $\alpha(t) = (t,t)$ כאשר $t \in [0,2\pi]$.

א. מהו אורכה של α?

<u>פתרון:</u>

העקומה שלנו היא:



כאשר התחום שלנו הוא עד ל־2π.

לפי פיתגורס, אורך העקומה הוא: $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = \sqrt{2} \cdot 2\pi$.

למתקדמים, אפשר גם לחשב בעזרת הנוסחה:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(1,1)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

ב. המשטח S נתון על ידי: $r : \Omega \to \mathbb{R}^3$, כאשר:

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

מצאו את אורכה של העקומה $\beta = r \circ \alpha$.

<u>פתרון:</u>

קודם כל, מהו המשטח שלנו? המשטח שלנו הוא **הליקואיד.**

v יוצר גם את ההתקדמות למעלה/למטה ביחס לציר z וגם את הזווית, ולכן זהו סליל, קפיץ שמתקדם במעלה ציר ה$-z$.

u משפיע על עובי הסליל, ולכן המשטח שלנו הוא מין סליל עבה, משהו כזה:

אפשר לחשב את אורכה של β בדרך הסטנדרטית; נחשב אותו בעזרת המטריקה.

אם כן, וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0)\,, r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 0^2 = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v = 0 \\ g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = u^2 + 1 \end{gathered}$$

ולכן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

כעת, $\alpha'(t) = (1,1)$ ולכן:

$$\sqrt{(\gamma'(t))^t G (\gamma'(t))} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{t^2+2}$$

ולכן:

$$L(\beta)=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{t^2+2}dt$$

זהו אינטגרל טריוויאלי, והוא שווה בערך ל־22.43.

ג. נחליף את המטריקה ל:

$$G=\left(\begin{array}{cc} 2e^{2u} & 0\\ 0 & 2e^{2v}\end{array}\right)$$

מהו האורך של β עכשיו?

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה. הפעם:

$$\sqrt{\left(\gamma'\left(t\right)\right)^t G\left(\gamma'\left(t\right)\right)}=\sqrt{\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2e^{2t} & 0\\ 0 & 2e^{2t}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1\\ 1\end{array}\right)}=\sqrt{2e^{2t}+2e^{2t}}=2e^t$$

ולכן:

$$L(\beta)=\int\limits_0^{2\pi}2e^t dt=2\cdot\left(e^{2\pi}-1\right)$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $r:[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ המפה המוגדרת על ידי:

$$r\left(u,v\right)=\left(\cos u,\sin u,v\right)$$

זהו גליל אינסופי עם רדיוס 1 שמרכזו על ציר ה־z.

נסמן: $U=[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ ותהי $\gamma:[a,b]\to U$ עקומה. נגדיר עקומה נוספת על הגליל שלנו על ידי:

$$\rho\left(t\right)=r\left(\gamma\left(t\right)\right)$$

הוכיחו ש: $L\left(\rho\right)=L\left(\gamma\right)$.

<u>פתרון:</u>

האורך של γ נתון על ידי:

$$L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

נחשב את מקדמי המטריקה. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(-\sin u,\cos u,0)\,,r_v=(0,0,1)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11}=\langle r_u,r_u\rangle=\sin^2 u+\cos^2 u=1\\ g_{12}=g_{21}=\langle r_u,r_v\rangle=0\\ g_{22}=\langle r_v,r_v\rangle=1 \end{gathered}$$

ואם כן:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן האורך של ρ הוא:

$$L(\rho)=\int_a^b \sqrt{(\gamma')^{\,t}G(\gamma')}dt=\int_a^b \sqrt{(\gamma')^{\,t}(\gamma')}dt=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt=L(\gamma)$$

והאורכים אכן שווים.
כדי להמחיש זאת, קחו דף וקשקשו עליו עקומה כלשהי.
כעת, גלגלו את הדף לגליל (חלקכם בדוואי מנוסים בכך); זו מה שעושה המפה r.
מה קרה לקשקוש שלנו? הפיכת הדף המישורי לגליל לא כיווצה או מתחה אותו, ולכן אין שום סיבה שאורך הקשקוש ישתנה.
אם כן, המפה r שומרת על אורך של עקומות.

5.3.2 חישוב שטחים על משטחים

יהי M משטח המוגדר על ידי $\varphi : U\to\mathbb{R}^3$.
תהי $D\subseteq U$. אפשר לחשב את השטח של $\varphi(D)$ בעזרת הנוסחה:

$$\iint\limits_{\varphi(D)} dS=\iint\limits_{D}\sqrt{\det G}dudv$$

חשבו מהי החלפת המשתנים המתאימה.

<u>תרגיל:</u>

נתון המשטח $r:U\to M$, כאשר $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y>0\right\}$, ונתונה המטריקה:

$$G=\frac{1}{y^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

א. מצאו את אורך העקומות $\beta_i=r\circ\gamma_i$ במקרים הבאים:

1. $\gamma_1(t)=(A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

<u>פתרון:</u>

המטריקה כבר נתונה לנו.

וקטור הנגזרות של העקומה הוא: $\gamma_1'(t)=(-A\sin t, A\cos t)$ ולכן:

$$L(\beta_1)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\begin{pmatrix}-A\sin t & A\cos t\end{pmatrix}\frac{1}{(A\sin t)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A\sin t\\ A\cos t\end{pmatrix}}dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{(A\sin t)^2}\cdot\left(A^2\sin^2 t+A^2\cos^2 t\right)}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sin t}dt$$

את האינטגרל הזה אפשר לחשב בעזרת ההצבה האוניברסלית $x=\tan\frac{t}{2}$ ואפשר ללכת עם ולהרגיש בלי, כך:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=\left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{2\pi}{3}}=\ln 3$$

וזהו האורך של β_1.

2. $\gamma_2(t)=(A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t\in[0,\pi]$.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה זהה לזו שבתת־סעיף 1, ורק הגבולות משתנים, ולכן:

$$L(\beta_2)=\left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=0}^{t=\pi}=\infty$$

כלומר, חצי הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך אינסופי, בעוד ששישית הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך $\ln 3$.

3. $\gamma_3(t)=(1,t)$ כאשר $t\in[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

וקטור הנגזרות של העקומה הוא $\gamma_3'(t)=(0,1)$ ולכן:

$$L(\beta_3)=\int_0^1\sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{(t)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}dt=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{t^2}}dt=(\ln t)_{t=0}^{t=1}=\infty$$

אם כן, גם קטע (מקביל לציר ה$-y$) הופך לעקומה באורך אינסופי.

ב. חשבו את השטח של $r\circ\Omega$ כאשר:

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),x^2+y^2>1\right\}$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה: $\iint_{\varphi(D)}dS=\iint_D\sqrt{\det G}dxdy$.

מתקיים:

$$\sqrt{\det G}=\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{1}{y^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{y^2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{y^2}$$

מהו התחום D שלנו? $D=\left\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\sqrt{1-x^2}<y<\infty\right\}$ ולכן:

$$S(r\circ\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}dydx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y}\right)_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=(\arcsin x)_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

כלומר התחום האינסופי הזה הופך לתחום עם שטח סופי. מה פה קורה פה?

הידעת?

המשטח M הוא **המישור ההיפרבולי**, מישור המקיים את כל האקסיומות האוקלידיות חוץ מאקסיומת המקבילים.

הוא נקרא גם **חצי המישור של פואנקרה** או **המישור של לובצ'בסקי**.

לפי **משפט הילברט**, אין שיכון של חצי המישור של פואנקרה בתוך $\mathbb{R}^3$.

5.3.3 שוני בין פרמטריזציות

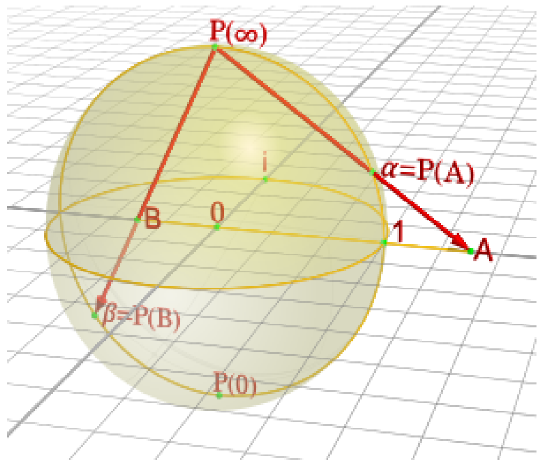
<u>תרגיל:</u>

נתבונן במשטח S^2, ספירת היחידה ב־$\mathbb{R}^3$, עם שתי פרמטריזציות:

א. $f(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$.

ב. $F(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right)$.

F היא הפונקציה ההופכית להטלה הסטריאוגרפית:



איך פועלת ההטלה הסטריאוגרפית?

מניחים את הספירה על המישור.

לכל נקודה על הספירה, נמתח קו בינה לבין הקוטב הצפוני.

את הקו נמשיך עד שהוא חותך את המישור.

ההטלה הסטריאוגרפית שולחת את הנקודה על הספירה לנקודת החיתוך של הקו עם המישור.

ג. $G(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}(u,v,1)$ ההעתקה ההפוכה להטלה המרכזית; ההטלה המרכזית היא ממרכז הספירה על המישור $z=1$.

מצאו את המטריקה הרימנית בשלושת המקרים.

שימו לב שאפשר להגדיר את ההטלות האלו לספירה עם רדיוס כללי R.

<u>פתרון:</u>

א. וקטורי הנגזרות הם:

$$f_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \; f_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_\theta, f_\theta\rangle & \langle f_\theta, f_\phi\rangle \\ \langle f_\phi, f_\theta\rangle & \langle f_\phi, f_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. באופן דומה מחשבים ומקבלים:

$$G=\frac{1}{\left(u^2+v^2+1\right)^2}\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)$$

ג. שוב, נגזור ונכפיל ונקבל:

$$G=\frac{1}{\left(u^2+v^2+1\right)^2}\left(\begin{array}{cc}v^2+1 & -uv\\ -uv & u^2+1\end{array}\right)$$

אם כן, פרמטריזציות שונות משרות מטריקות שונות.

שימו לב שבפרמטריזציה השנייה קיבלנו מטריצה סקלרית, בפרמטריזציה הראשונה מטריצה אלכסונית שאינה סקלרית ובפרמטריזציה השלישית מטריצה שכלל אינה אלכסונית.

משפט 5.4 שני משטחים הם איזומורפיים (איזומטריים) אם ורק אם קיימות פרמטריזציות שלהם שבהן G זהה.

כלומר, התבנית היסודית הראשונה היא תכונה פנימית של המשטח.

<u>תרגיל:</u>

נתונה פרמטריזציה של משטח $r:U\to M$. תהי $f:A\to U$ פונקציה, $f\left(x,y\right)=\left(u,v\right)$ כאשר $A,U\subseteq\mathbb{R}^2$.

נגדיר פרמטריזציה חדשה: $\tilde{r}=r\circ f$. הביעו את $\widetilde{G}$, המטריקה של $\tilde{r}$, באמצעות G, המטריקה של r.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש: $\widetilde{G}=J_{\tilde{r}}^t\cdot J_{\tilde{r}}$. כעת, לפי כלל השרשרת:

$$J_{\tilde{r}}=J_r(f)\cdot J_f$$

ולכן:

$$\widetilde{G}=J_{\tilde{r}}^t\cdot J_{\tilde{r}}=\left(J_r(f)\cdot J_f\right)^t\cdot J_r(f)\cdot J_f=J_f^t\cdot J_r(f)^t\cdot J_r(f)\cdot J_f=J_f^tGJ_f$$

ובסה"כ:

$$\widetilde{G}\left(x,y\right)=J_f^t\left(x,y\right)G\left(f\left(x,y\right)\right)J_f\left(x,y\right)$$

תרגילים נוספים

1. חשבו את התבניות היסודיות של המשטחים הבאים:

   (א) משטח הנתון בצורה הסתומה $z = f(x, y)$.

   (ב) $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, ku)$.

   (ג) $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, kv)$.

   (ד) $r(t, \theta) = (\cosh t\cos\theta, \cosh t\sin\theta, t)$.

   (ה) $r(t, \theta) = (2\sin t\cos\theta, 2\sin t\sin\theta, 2\cos t)$.

   (ו) $r(\theta, v) = (\cosh v\cos\theta, \cosh v\sin\theta, \sinh v)$.

2. מצאו נוסחה מפורשת להטלה הסטריאוגרפית.

3. תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ עקומה פשוטה ורגולרית. נגדיר את **הגליל מעל** γ באופן הבא:

$$\Phi\,(a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(s, u) = \left(\gamma^1(s), \gamma^2(s), u\right)$$

כאשר $\gamma = \left(\gamma^1, \gamma^2\right)$. הראו כי קיימות קואורדינטות על הגליל (פרמטריזציה של γ), עבורן $G = I$.

4. ספירת היחידה מוגדרת על ידי הפרמטריזציה הבאה:

$$f(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

כאשר $U = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (\theta, \phi)$. נתבונן בעקומה $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to U$ המוגדרת על ידי: $\gamma(t) = (2t, \pi)$.

   (א) מצאו את אורך העקומה γ.

   (ב) מצאו את אורך העקומה $f \circ \gamma$.

   (ג) הספירה לסמי התחצפה, ולא התחפפה, וסומו ישב עליה עד שיצאה טורוס, המוגדר על ידי הפרמטריזציה:

$$r(u, v) = ((2 + \cos u)\cos v, (2 + \cos u)\sin v, \sin u)$$

   חשבו את השטחים $r(D), r(E)$, כאשר $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$, $E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]$.

פתרונות

1. נגזור ונכפיל את וקטורי הנגזרות זה בזה.

(א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u,v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=\left(1,0,f_u\right),r_v=\left(0,1,f_v\right)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{aligned}g_{11}&=\langle r_u,r_u\rangle=1+f_u^2\\ g_{12}=g_{21}&=\langle r_u,r_v\rangle=f_uf_v\\ g_{22}&=\langle r_v,r_v\rangle=1+f_v^2\end{aligned}$$

ובסה"כ המטריקה היא:

$$G=\left(\begin{array}{cc}1+f_u^2 & f_uf_v\\ f_uf_v & 1+f_v^2\end{array}\right)$$

(ב) המשטח שלנו הוא חרוט.
נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$r_u=\left(\cos v,\sin v,k\right),r_v=\left(-u\sin v,u\cos v,0\right)$$

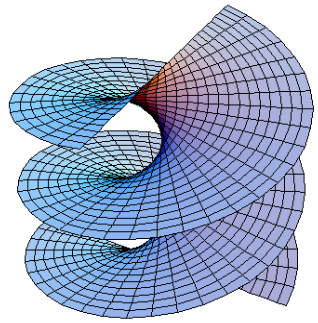
מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{aligned}g_{11}&=\langle r_u,r_u\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v+k^2=1+k^2\\ g_{12}=g_{21}&=\langle r_u,r_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v+0^2=0\\ g_{22}&=\langle r_v,r_v\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+0^2=u^2\end{aligned}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$G=\left(\begin{array}{cc}1+k^2 & 0\\ 0 & u^2\end{array}\right)$$

(ג) המשטח שלנו הוא הליקואיד:



נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0)\,, r_v = (-u\sin v, u\cos v, k)$$

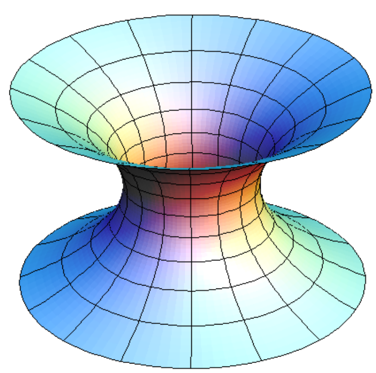
מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = -u\cos v \sin v + u \cos v \sin v + 0 = 0$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + k^2 = u^2 + k^2$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + k^2 \end{pmatrix}$$

(ד) המשטח שלנו הוא קטנואיד:



לפני שנתחיל בגזירות ובחגיגות, נזכור ש:

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

ובזהויות בסיסיות של הפונקציות ההיפרבולית, כגון:

$$(\cosh t)'=\sinh t,(\sinh t)'=\cosh t,1=\cosh^2 t-\sinh^2 t$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t=\left(\sinh t\cos\theta,\sinh t\sin\theta,1\right),r_\theta=\left(-\cosh t\sin\theta,\cosh t\cos\theta,0\right)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11}=\langle r_t,r_t\rangle=\sinh^2 t\cos^2\theta+\sinh^2 t\sin^2\theta+1=\sinh^2 t+1=\cosh^2 t$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_t,r_\theta\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle r_\theta,r_\theta\rangle=\cosh^2 t\sin^2\theta+\cosh^2 t\cos^2\theta=\cosh^2 t$$

ולכן:

$$G=\begin{pmatrix}\cosh^2 t & 0\\ 0 & \cosh^2 t\end{pmatrix}$$

(ה) וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t=(2\cos t\cos\theta,2\cos t\sin\theta,-2\sin t),r_\theta=(-2\sin t\sin\theta,2\sin t\cos\theta,0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11}=\langle r_t,r_t\rangle=4\cos^2 t\cos^2\theta+4\cos^2 t\sin^2\theta+4\sin^2 t=4$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_t,r_\theta\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle r_\theta,r_\theta\rangle=4\sin^2 t\sin^2\theta+4\sin^2 t\cos^2\theta=4\sin^2 t$$

ולכן:

$$G=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\sin^2 t\end{pmatrix}$$

(ו) המשטח שלנו הוא היפרבולואיד.

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_v=\left(\sinh v\cos\theta,\sinh v\sin\theta,\cosh v\right),r_\theta=\left(-\cosh v\sin\theta,\cosh v\cos\theta,0\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=\langle r_v,r_v\rangle=\sinh^2 v\cos^2\theta+\sinh^2 v\sin^2\theta+\cosh^2 v=\cosh 2v$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_v,r_\theta\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle r_\theta,r_\theta\rangle=\cosh^2 v\sin^2\theta+\cosh^2 v\cos^2\theta=\cosh^2 v$$

ולכן המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix}\cosh 2v & 0\\ 0 & \cosh^2 v\end{pmatrix}$$

2. תהי $p\in S^2\setminus\{N\}$ נקודה על הספירה שאינה הקוטב הצפוני.
הישר Np מוגדר על ידי:

$$Np=\{(1-t)\,N+pt : t\geq 0\}$$

אם נסמן $p=(x,y,z)$ ונזכור ש: $N=(0,0,1)$, נקבל:

$$Np=\{(tx,ty,1-t+tz)\,|t\geq 0\}$$

נקודת החיתוך עם המישור xy מקיימת: $1-t+tz=0$, כלומר: $t=\frac{1}{1-z}$.
לכן, הנקודה היא: $\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)$, ולכן ההטלה הסטריאוגרפית מוגדרת כך:

$$F\,(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)$$

3. נחשב את המטריקה G. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(0,0,1)\,,r_s=\left(\left(\gamma^1\,(s)\right)',\left(\gamma^2\,(s)\right)',0\right)$$

ולכן:

$$g_{22}=r_u\cdot r_u=1$$

$$g_{12}=g_{21}=r_u\cdot r_s=0$$

$$g_{11}=r_s\cdot r_s=\|\gamma'\,(s)\|^2$$

ולכן אם נבחר פרמטריזציה טבעית (שבה $\|\gamma'\,(s)\|=1$) נקבל שאכן:

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

4. נשתמש במטריקה G.

(א) וקטור הנגזרות הוא: $\gamma'(t) = (2,0)$, ולכן האורך הוא:

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(2,0)\| \, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם:

$$f_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), f_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_\theta, f_\theta\rangle & \langle f_\theta, f_\phi\rangle \\ \langle f_\phi, f_\theta\rangle & \langle f_\phi, f_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן, האורך הוא:

$$L(f\circ\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin^2 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 2t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2t dt =$$

$$= -\cos 2t|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 2$$

(ג) וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u), r_v = (-(2+\cos u)\sin v, (2+\cos u)\cos v, 0)$$

ולכן:

$$g_{11} = r_u \cdot r_u = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_v = 0$$

$$g_{22} = r_v \cdot r_v = (2+\cos u)^2$$

כלומר $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos u)^2 \end{pmatrix}$.

כעת, נחשב את השטח באמצעות הנוסחה:

$$\iint_{r(D)} dS = \iint_D \sqrt{\det G} dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos u)\, du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2u+\sin u)|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi + 1)\, dv = \frac{\pi}{2} (\pi + 1)$$

$$\iint_{r(E)} dS = \iint_E \sqrt{\det G} dS = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos u)\, du dv = \pi (\pi + 1)$$

הטורוס נראה כך: