תרגילים פתורים על גרין

2 באפריל 2019

1. תהי $\omega = P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y$ סגור המוגדר על $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. תהיינה C_1 ו C_2 עקומות חלקות ופשוטות מכונות חיובית שעוקפות את p. הראו ש

$$\int_{C_1} F = \int_{C_2} F.$$

פתרון: קיים מעגל בעל רדיס מספיק קטן C המוכל בשטח המוקף על ידי C_1 ו C_2. נסמן ב D_1 את התחום התחום על ידי העקומות C_1 ו C ו ב D_2 את השטח התחום על ידי C_2 וC. מכיוון שהתבנית סגורה, מתקיים

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

נשים לב, שמכיוון ש C נמצאת בתוך השטח התחום על ידי C_1 ו C_2 האוריינטציה החיובית של C ביחס ל D_1 וביחס ל D_2 היא אותה אוריינטציה. כמו כן, משפט גרין נותן לנו

$$\begin{aligned}0 &= \iint_{D_1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \int_{\partial D_1} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y \\ &= \int_C P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y + \int_{C_1} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}0 &= \iint_{D_2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \int_{\partial D_2} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y \\ &= \int_C P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y + \int_{C_2} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y\end{aligned}$$

מהמשוואות נובע ש

$$\int_{C_1} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y = \int_{C_2} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y.$$