מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ז

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 14/09/16

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & x>1 \\ |x| & -1<x\le 1 \\ 2x-3 & x\le -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x))\le |x-1|$

תחום ראשון $x>1$ ולכן כי השוויון נראה כך

$$f(-x^2)\le x-1$$

כיוון ש $x<1$ אז $x^2>1$ ולכן $-x^2<-1$

ולכן אי השיוויון נראה כך

$$2(-x^2)-3\le x-1$$

$$2x^2+x+2\ge 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{4}$$

כלומר זו פרבולה מחייכת ומרחפת ולכן מתקיים בכל התחום.

תחום $0\le x\le 1$

אי השיוויון הוא

$$f(|x|)\le 1-x$$

אבל בתחום זה $|x|=x$

ולכן $f(|x|)=f(x)=|x|=x$

סה"כ אי השיוויון הוא

$$x\le 1-x$$

$$2x\le 1$$

$$x\le\frac{1}{2}$$

לא מתקיים $\frac{1}{2}<x\le 1$ כן מתקיים $0\le x\le\frac{1}{2}$

תחום שלישי $-1 < x < 0$

אי השיוויון הוא

$$f(|x|) \leq 1 - x$$

אך הפעם $|x| = -x$

$$f(|x|) = f(-x)$$

אבל עדיין $-1 < -x \leq 1$ ולכן

$$f(-x) = |-x| = |x| = -x$$

אי השיוויון נראה כך

$$-x \leq 1 - x$$

$$0 \leq 1$$

מתקיים בכל התחום.

תחום רביעי $x \leq -1$

$$f\big(f(x)\big) = f(2x - 3)$$

כעת נפתח את אי השיוויון שמתאר את התחום, על מנת להבין מה התחום של $2x - 3$

$$x \leq -1$$

$$2x \leq -2$$

$$2x - 3 \leq -5$$

ולכן

$$f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

אי השיוויון נראה כך

$$4x - 9 \leq 1 - x$$

$$5x \leq 10$$

$$x \leq 2$$

מתקיים בכל התחום.

סה"כ סיכום

מתקיים לכל $x \leq \frac{1}{2}$ ולכל $x > 1$.

הערשה קטנה:

האם נכון היה לרשום "או" או "וגם"?

זה בעצם תלוי במשפט המלא, שהוא לרוב חסר.

x הוא מקיים את אי השיוויון אם ורק אם $x \leq \frac{1}{2}$ או $x > 1$

כל התחום $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ מקיים את אי השיוויון וגם כל התחום $(1, \infty)$ מקיים את השיוויון.

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $(z+i)^5 = 1+i$

נסמן $w = z + i$ נפתור עבור w ונקבל 5 פתרונות, מהם נקבל 5 פתרונות למשוואה

$$z_k = w_k - i$$

וסה"כ

$$z_k = \sqrt[10]{2} cis\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right) - i$$

עבור $k = 0,1,2,3,4$

3.

א. יהי וקטור במרחב $v \in \mathbb{R}^3$. הוכיחו כי $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = (0,0,0)$.

ב. יהיו שני וקטורים במרחב $v, u \in \mathbb{R}^3$ המאונכים זה לזה, כך ש $v, u \neq (0,0,0)$.

מצאו את כל הסקלרים (מספרים) $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימים $av + bu = (0,0,0)$.

א.

נוכיח בשני הכיוונים. בכיוון הראשון, אם $v = (0,0,0)$ ברור ש $v \cdot v = 0$

בכיוון השני, נניח כי $v \cdot v = 0$ צ"ל $v = (0,0,0)$

נסמן $v = (a, b, c)$ לפי הנתון

$$v \cdot v = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

ולכן $a = b = c = 0$ כפי שרצינו.

ב. ברור ש$a = b = 0$ מקיימים את המשוואה, נבדוק האם יש גם אחרים.

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $au + bv = (0,0,0)$

$$(au + bv) \cdot u = (0,0,0) \cdot u$$

$$a|u|^2 = 0$$

כיוון ש $u \neq 0$ גם $|u| \neq 0$ ולכן סה"כ $a = 0$

באופן דומה ע"י כפל בv נסיק כי $b = 0$

והפתרון <u>היחיד</u> הוא $a = b = 0$.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $2 \leq n \in \mathbb{N}$ המספר $n^3 - n$ מחלק ב3.
בונוס: הוכיחו כי למעשה $n^3 - n$ מתחלק ב6.

בדיקה: עבור $n = 2$ אכן $2^3 - 2 = 6$ מתחלק ב3

בהנתן n עבורו $n^3 - n$ מתחלק ב3, צ"ל כי $(n+1)^3 - (n+1)$ מתחלק ב3.

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

סכום של ביטויים המתחלקים ב3 מתחלק גם הוא ב3.

בונוס: על מנת להראות שהביטוי מתחלק ב6 מספיק להוכיח שהוא גם זוגי.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

$n(n+1)$ הוא תמיד זוגי כמכפלה של שתי עוקבים.

תוספת, למעשה בדרך זו ניתן לעקוף את כל האינדוקציה כי

$n(n+1)(n-1)$ הוא מכפלה של 3 מספרים עוקבים, אחד מהם חייב להתחלק ב3.

5. פתרו את האינטגרל $\int\left[\left(3x^2+1\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)\right]dx$

$$\int (3x^2+1)\cdot\ln(1+x^2)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = 3x^2+1 & g = \ln(1+x^2) \\ f = x^3 + x & g' = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{Bmatrix} = (x^3+x)\ln(1+x^2) - \int \frac{(x^3+x)2x}{1+x^2}dx =$$

$$= (x^3+x)\ln(1+x^2) - \int \frac{x(x^2+1)2x}{1+x^2}dx = (x^3+x)\ln(1+x^2) - \int 2x^2 dx = (x^3+x)\ln(1+x^2) - \frac{2x^3}{3} + C$$

6. <u>הגדרה:</u> אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **מלא** אם

$$\forall a \in \mathbb{N} \forall b \in \mathbb{N}: (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו מלא.

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן האוספים הבאים הינם מלאים ואילו אינם מלאים:

$S = \{(n,m) \mid n \leq m\}$, $R = \{(n,m) \mid n < m\}$,$T = \{(n,n) | n \in \mathbb{N}\}$

סעיף א': האוסף R אינו מלא

$$\exists a \in \mathbb{N} \exists b \in \mathbb{N}: (a,b) \notin R \wedge (b,a) \notin R$$

סעיף ב':

נוכיח כי T אינו מלא. נבחר $a = 1, b = 2$ ואכן $(1,2) \notin T$ וגם $(1,2) \notin T$

נוכיח כי R אינו מלא. נבחר $a = b = 1$ ואכן $(1,1) \notin R$ וגם $(1,1) \notin R$

נוכיח כי S כן מלא. יהיו $a,b \in \mathbb{N}$ אם $b \leq a$ אז $(a,b) \in S$ אחרת $a < b$ ולכן $(b,a) \in S$.

7. הוכיחו/הפריכו: לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq B \setminus C$

ננסה להוכיח.

תהיינה A,B,C

כיוון ראשון: נניח כי $A \setminus B \subseteq B \setminus C$ צ"ל $A \subseteq B$

יהי $x \in A$

צ"ל $x \in B$

נב"ש $x \notin B$, כיוון ש$x \in A$ נובע כי $x \in A \setminus B$

ולכן מהנתון $x \in B \setminus C$ ולכן $x \in B$ סתירה.

כיוון שני: נניח $A \subseteq B$ צ"ל $A \setminus B \subseteq B \setminus C$

יהי $x \in A \setminus B$

צ"ל כי $x \in B \setminus C$

נתון כי $x \in A$ וגם $x \notin B$

כיוון ש $x \in A$ וגם $A \subseteq B$ נובע כי $x \in B$

סתירה. וסיימנו כי שקר גורר כל דבר.

הסבר: כיצד הגענו לסתירה, והרי לא הנחנו לכאורה שום דבר? הסתירה היא לעצם קיומו של האיבר $x \in A \setminus B$.

בעצם הוכחנו כי $A \setminus B$ קבוצה ריקה, ולכן בוודאי היא מוכלת בכל דבר.