8.11.15

<u>תורת הקבוצות</u>

<u>תרגול 3</u>

<u>הגדרת טבעיים</u>

<u>בנייה:</u> $0=\emptyset$ $\qquad n+1 = n\cup\{n\}$

<u>הגדרה:</u> (פורמאלית). נגיד שסודר α הוא <u>טבעי</u> אם לכל $\beta\le\alpha$ $\beta=\emptyset$ או β עוקב.

נוכיח שקילות:

($\Leftarrow$) יהי n טבעי מהבנייה. נראה שעונה להגדרה הפורמאלית.

כלומר צריך להראות ש-n מקיים לכל $\alpha\le n$ $\alpha=\emptyset$ או α עוקב.

[<u>הערה:</u> קודם כל צריך בכלל להראות שכל ה-n-ים הם סודרים. הראנו בהרצאה.]

נניח בשלילה שיש n שלא מקיים את התכונה.

בגלל שקבוצה זו היא קבוצה סודרית. נבחר את <u>הראשון</u> שלא מקיים את התכונה. קל לראות ש-0 עונה על ההגדרה

ולכן $n\neq 0$. לכן $n=m\cup\{m\}$ כאשר $m+1=n$.

אז n בעצמו הוא עוקב. $m<n$ ולכן m בעצמו הוא <u>אפס</u> או <u>עוקב</u> (ממינימליות n) וכן כל מה שקטן ממנו.

אז n הוא העוקב של m. לכן לכל $\alpha<n$ $\alpha\le m$,

וראינו ש-α מקיים $\alpha=\emptyset$ או α עוקב.

לכן n עונה על ההגדרה בסתירה!

($\Rightarrow$) צריך להראות. אם α מקיים את ההגדרה הפורמאלית.

(צ.ל) יש n כך ש- $\alpha=n$. לכל קבוצה לא ריקה של סודרים יש איבר ראשון. נניח שיש α שלא שווה לאף n.

נבחר את הראשון שמקיים זאת.

לא יתכן $\alpha=\emptyset$ שכן $\emptyset=0$, לכן α עוקב.

ולכן קיים β כך ש- $\alpha=\beta+1$, נשים לב ש-β בעצמו

גם עונה על ההגדרה. כי לכל $\gamma\le\beta$, $\gamma<\alpha$ ולכן

$\gamma=\emptyset$ או γ עוקב.

בגלל ש- α הראשון לא שווה לאף n. ברור ש- $\beta<\alpha$ -

יש m כך ש- $\beta=m$. אבל $\alpha=\beta+1$ - אז

$\alpha=\{\beta\}\cup\beta=m\cup\{m\}=m+1$ בסתירה!

הגדרה: כל מספר טבעי n הוא ~~...~~ קבוצה בת n איברים.

הוכחה: נניח בשלילה שיש n שלא מקיים את הנ"ל. (נבחר את הראשון).

$n\neq 0$ כי $0=\phi$ = קבוצה בת 0 איברים.

לכן $n=m\cup\{m\}$ עבור $n=m+1$, $m<n$

לכן ב- m יש בדיוק n-1 איברים.

נזכור שכל הטבעיים הם סודרים, וסודר לא שייך לעצמו

לכן $m\notin m$ לכן ב- n יש בדיוק n איברים.

מש"ל

טענה: $n=\{0,\dots,n-1\}$

הוכחה: בדיוק כמו בהוכחה הקודמת.

נשים לב שלכן הם ל- n שנתנו מוסיפים את האיבר n-1.

תרגיל: (הגדרות פיאנו).

הוכח את התכונות הבאות של $\omega=\{n/n\in\mathbb{N}\}$

א. $0\in\omega$.

ב. אם $n,m\in\omega$ כך ש- $n\neq m$ גם $S(n)\neq S(m)$ (עוקב).

ג. אם $A\subseteq\omega$ ו- $0\in A$ ולכל $n\in A$ גם $S(n)\in A$ אז $A=\omega$.

פתרון: א. בהגדרה.

ב. יהיו $m\neq n$ רוצים להראות $m+1\neq n+1$.

כלומר $m\cup\{m\}\neq n\cup\{n\}$. נניח בשלילה.. שיש שוויון.

לכן $m\in m\cup\{n\}$ אבל $n\neq m$ לכן $m\in n$

ובאופן דומה $n\in m$. וזו סתירה!

$f(x\downarrow)$ רישא בפונק' α. $x\downarrow < y\downarrow$ לכן $f(x\downarrow) < f(y\downarrow)=\alpha$.

הוכחנו שכל רישא ממש של סודר היא בעצמה סודר!

נסמן $f(x\downarrow)=\beta$ $\beta \subset \alpha \Rightarrow \beta<\alpha$.

β איבר שיכון בסדר של $x\downarrow$, שכן f איזו' סדר

ולכן גם הצמצום של f על $x\downarrow$. איזו' סדר. $[f|_{x\downarrow} \to f(x\downarrow)]$

ע-ל!

__תרגיל:__ תהיה $(A,<)$ סדורה היטב $B\subseteq A$ __שולית__

נניח שקיים סודר α כך שלכל $b\in B$ $otp((b\downarrow,<))<\alpha$.

הוכח $otp((A,<))\le\alpha$.

__פתרון:__ נניח בשלילה כי $\beta=otp(A,<)\ge\alpha$.

יש איזו' סדר $f:A\to\beta$ $\alpha\in\beta$

לכן יש לו מקור! $a=f^{-1}(\alpha)$ ב-A.

לכן $otp(a\downarrow)=\alpha$. קיים $b\in B$ כך ש-.

$b\ge a$. לכן $otp(b\downarrow)\ge otp(a\downarrow)\ge\alpha$ לכן סתירה!

__חיבור סודרים__

__הגדרה:__ α,β סודרים. נגדיר $\alpha+\beta=otp(\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\})$

עם הסדר שהגדרנו על איחוד זר של קבוצות.

__תכונות:__ (1) $\alpha+\emptyset=\emptyset+\alpha=\alpha$,

(2) חיבור סודרים הוא __לא__ __קומוטטיבי__. (לדוגמא $1+\omega=\omega\ne\omega+1$)

(3) $\beta_1<\beta_2 \Rightarrow \alpha+\beta_1<\alpha+\beta_2$.

(4) אם $\beta_1\le\beta_2$ אז $\beta_1+\alpha\le\beta_2+\alpha$.

__הוכחה:__ מספיק להוכיח $f:\beta_1+\alpha\to\beta_2+\alpha$ חח"ע ושומרת סדר.

כי אם $A\subseteq B$ אז $otp(A)\le otp(B)$.

ידוע שיש $g:\beta_1\to\beta_2$ חח"ע ושומרת סדר (מהמשפט)

אז $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\beta_1 \\ x & x\in\alpha \end{cases}$ (לא פורמלי!)

וזה עכשיו מקיים את הדרוש!

תרגיל: הוכח. $\alpha+1 = S(\alpha)$ (הגדרת חיבור)

(הגדרת עוקב)

פתרון: צריך לבנות $f: \alpha+1 \to \alpha\cup\{\alpha\}$ איזו סדר.

נשים לב ש- $\alpha+1 = \alpha\times\{0\} \cup 1\times\{1\}$

לכן $f(\beta,0)=\beta \quad \forall \beta<\alpha$

$f(1,1)=\alpha$.

(על) המקור של α הוא $(1,1)$ ולכל $\beta\in\alpha$. המקור הוא $(\beta,0)$.

(חח"ע) ברור...

(שומרת סדר) יהיו $r_1<r_2$ ב- $\alpha+1$. אם $r_1,r_2\in\alpha$.

אז $r_1=(\beta_1,0)$ $r_2=(\beta_2,0)$

$\Rightarrow$ $\beta_1<\beta_2$ ולכן $f(r_1)<f(r_2)$.

אם $r_2=(1,1)$ אז $f(r_1)=\beta\in\alpha$ ו- $f(r_2)=\alpha$.

לכן $\beta<\alpha$ כנדרש. מ.ש.ל!

תרגיל: $S(\alpha+\beta)=\alpha+S(\beta)$

פתרון: הראנו ש- $S(\gamma)=\gamma+1$

(כשומר סדר.) כסכום סודרים

לכן $S(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)+1 = \alpha+(\beta+1) = \alpha+S(\beta)$

חיסור סודרים

יהיו $\alpha\le\beta$ נגדיר $\beta-\alpha = otp(\beta\setminus\alpha)$

תרגיל: הוכח את התכונות הבאות.

1. $\alpha+(\beta-\alpha)=\beta$
2. $\alpha=\beta \iff 0=\beta-\alpha$.
3. $\alpha<\beta \iff 0<\beta-\alpha$.

פתרון: (1) נרצה לבנות $f:\beta\to\alpha+(\beta\setminus\alpha)$ ה שומרת סדר.

קודם כל נשים לב ש- $\beta\setminus\alpha=\gamma$ רק ש-

γ הוא טיפוס סדר של $\beta\setminus\alpha$.

יהי $\delta\in\beta$. אם. $\delta\in\alpha$ $f(\delta)=(\delta,0)$

אחרת $\delta \notin \alpha$ אז $\delta \in \beta|\alpha$. $otp(\beta|\alpha) = \gamma$

לכן קיימת $g : \beta|\alpha \to \gamma$ איזו סדר.

ולכן נגדיר $f(\delta) = (g(\delta), 1)$.

__על:__ המקור של $(\delta, 0)$ הוא δ עבור $\delta < \alpha$.

המקור של $(\delta, 1)$ עבור $\delta < \gamma$ הוא $g^{-1}(\delta)$

קיים כי g על!

__שומר סדר:__ אם $\beta_1 < \beta_2 \in \alpha$ אז $f(\beta_1) = (\beta_1, 0) < (\beta_2, 0) = f(\beta_2)$

אם $\delta_1 < \delta_2 \in \beta|\alpha$

אז בגלל ש- g שומר סדר אז f שומר סדר!

אם $\delta_1 \in \alpha$ $\delta_2 \in \beta|\alpha$ אז אוטומטית $\delta_1 < \delta_2$,

לכן $f(\delta_1) \in \alpha$ $f(\delta_2) \in \beta|\alpha$ לכן $f(\delta_1) < f(\delta_2)$

__תרגיל:__ הוכח שאם $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$ אז $\beta_1 < \beta_2$.

__הוכחה:__ נניח בשלילה. $\beta_1 \geq \beta_2$ אז $\alpha + \beta_1 \geq \alpha + \beta_2$ בסתירה.

__תרגיל:__ הוכח שהסופרמום $\sup_{\gamma \in A}(\gamma + 1)$

הוא __הקטן ביותר__ __שגדול ממש__ __מכל__ איברי A.

__הוכחה:__ (גדול ממש) יהי $\delta \in A$. לכן $\delta \in \delta + 1$.

לכן $\delta \in \sup_{\gamma \in A}(\gamma + 1)$.

(קטן ביותר) יהי $\beta < \sup(\,)$.

כלומר $\beta \in \sup(\,)$ כלומר יש $\gamma \in A$ כך ש-

$\beta \in \gamma + 1 \Rightarrow \beta < \gamma + 1 \Rightarrow \beta \leq \gamma$

בפרט. $\beta \not> \gamma$ אז β לא גדול ממש מאיברי A.