

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 4 – פיתרון

טענת עזר שנשתמש בה בכל התרגילים

טענת עזר: יהיו $F \subseteq K \subseteq L$ שדות ו- $a \in L$ אלגברי מעל F . נניח $[K:F] < \infty$. אזי אם $\gcd([K:F], [F[a]:F]) = 1$, אז $[K[a]:F] = [K:F] \cdot [F[a]:F]$. (למעשה, זה אם ורק אם.)

הוכחה: $K, F[a]$ הם תתי שדות של $K[a]$ ולכן $[K[a]:F]$ מתחלק ב- $[K:F]$ וב- $[F[a]:F]$. מכאן נובע כי $[K[a]:F]$ מתחלק ב- $[K:F] \cdot [F[a]:F]$. אבל $\text{lcm}([K:F], [F[a]:F]) = \frac{[K:F] \cdot [F[a]:F]}{\gcd([K:F], [F[a]:F])}$. **משל.** $[K[a]:F] = [K:F] \cdot [F[a]:F]$ ולכן $[K[a]:F] = [K[a]:K] \cdot [K:F] \leq [F[a]:F][K:F]$.

מסקנה: אם $F \subseteq L$ ו- $a, b \in L$ אלגבריים ו- $\gcd([F[a]:F], [F[b]:F]) = 1$, אז $[F[a, b]:F] = [F[a]:F] \cdot [F[b]:F]$.

הוכחה: נגדיר $K = F[b]$ ונשתמש בטענת העזר.

שאלה 1

חשבו (עם הצדקה):

$$1. [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{5 + \sqrt{5}}]: \mathbb{Q}]$$
$$2. [\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{10}, \sqrt[6]{5}]: \mathbb{Q}[\sqrt{5}]]$$

פיתרון

פתרון 1: נסמן $\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{3}}$ ו- $\beta = \sqrt{5 + \sqrt{5}}$. מתקיים:

$$0 = (\beta^2 - 5)^2 - 5 = \beta^4 - 10\beta^2 + 20$$

$$0 = (\alpha^3 - 3)^3 - 3 = \alpha^9 - 9\alpha^6 + 27\alpha^3 - 30$$

קיבלנו ש- α מאפס פולינום אייזנשטיין (ביחס ל-3) ממעלה 9 ו- β מאפס פולינום אייזנשטיין (ביחס ל-5) ממעלה 4. לכן, $[\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] = 9$ ו- $[\mathbb{Q}[\beta]: \mathbb{Q}] = 4$. **הם מספרים זרים** ולכן לפי טענת העזר $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta]: \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}[\beta]: \mathbb{Q}] = 9 \cdot 4 = 36$.

פתרון 2: מתקיים $3 = \frac{[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}]: \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}[\sqrt{5}]: \mathbb{Q}]}$.

בנוסף, מתקיים $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{10} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ שורש של הפולינום $x^2 - 2(1 + \sqrt{5})^2$. זה אומר ש- $[\mathbb{Q}[\alpha, \sqrt{5}]: \mathbb{Q}[\sqrt{5}]] \leq 2$. כדי להראות שוויון מספיק לבדוק ש- $\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. אם לא, אז $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}+1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. ממשיכים כמו שעשינו עם דוגמאות דומות בכיתה [או באופן דומה לתרגיל בית 3 שאלה].

¹ זהירות: אם לא מניחים $\gcd([F[a]:F], [F[b]:F]) = 1$ אז יתכן ש- $[F[a, b]:F] \neq [F[a]:F] \cdot [F[b]:F]$.
² הערה: בשלב זה של הקורס כבר אין צורך להוכיח ש- $[\mathbb{Q}[\sqrt[n]{a}]: \mathbb{Q}] = n$ עבור a "מספיק טוב" (לדוגמה, a ראשוני).

לכן, $[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}]: \mathbb{Q}[\sqrt{5}]] = 3$ ו- $[\mathbb{Q}[\alpha, \sqrt{5}]: \mathbb{Q}[\sqrt{5}]] = 2$ ומטענת העזר נובע
 $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{10}, \sqrt[6]{5}]: \mathbb{Q}[\sqrt{5}]] = 2 \cdot 3 = 6$.
 הערה: למעשה, $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

שאלה 2

1. הוכיחו: $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.
2. מצאו שדה $K \subseteq \mathbb{C}$ שבו $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \neq K$ איזומורפי ל- $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. הוכיחו כי השדות איזומורפיים אך שונים כקבוצות.

[אין קשר בין הסעיפים.]

פיתרון

הוכחת 1: $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2 \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ ולכן $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

כדי להראות הכלה בכיוון השני נסמן $\alpha = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$ ונשים לב ש- $\mathbb{Q}[\alpha]$ הוא תת שדה של $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.
 לכן, $[\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] \mid [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]: \mathbb{Q}] = 3$. זה אומר ש- $[\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] \in \{1, 3\}$. אם $[\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] = 1$ אז קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש- $\alpha = q$. זה אומר ש- $\sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2 = \alpha = q$.
 לכך שהפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{5}$ הוא ממעלה 3. לכן, בהכרח $[\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] = 3$ וזה אומר ש-
 $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. **משל.**

הערה: אפשר להראות גם ישירות ש- $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}]$.

פיתרון 2: נסמן $\rho_3 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ (שורש שלישי 1) ונגדיר $K = \mathbb{Q}[\rho_3 \sqrt[3]{5}] \subseteq \mathbb{C}$.

$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \subseteq \mathbb{R}$ כי $K \neq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ אבל $\rho_3 \sqrt[3]{5} \in K \setminus \mathbb{R}$.

כדי לראות ש- $K \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ נשים לב ש- $\rho_3 \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}$ הם שורשים של $x^3 - 5$ שהוא אי פריק מעל \mathbb{Q}
 (אייזנשטיין ביחס ל-5) ולכן $\mathbb{Q}[\rho_3 \sqrt[3]{5}] = K \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - 5 \rangle \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

למי שעוד לא מבין למה $\mathbb{Q}[\rho_3 \sqrt[3]{5}] \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - 5 \rangle$: אם $F \subseteq E$ שדות ו- $a \in E$ עם פולינום מינימלי f
 אז יש העתקת חוגים $\psi: F[x] \rightarrow E$ המוגדרת ע"י $\psi(f(x)) = f(a)$. לפי הגדרת הפולינום
 המינימלי, הגרעין של ψ הוא $\langle f \rangle$ ולפי ההגדרה $F[a] = \text{image } \psi$ (התמונה של ψ). לכן, לפי משפט
 האיזומורפיזם הראשון, $F[a] = \text{image } \psi = F[x]/\ker \psi \cong F[x]/\langle f \rangle$. לסיכום, קיבלנו ש-
 $F[x]/\langle f \rangle \cong F[a]$.

שאלה 3

מצא את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים מעל \mathbb{Q} . חשב את המימד שלהם.

1. $x^4 - 9x^2 + 8$

2. $x^7 - 7$

3. $x^6 - x^3 - 2$

פיתרון

הערה: בסעיפים השונים נשתמש בעובדה הבאה (שהיא די קלה להוכחה ואתם רשאים להשתמש בה): תהי E/F הרחבת שדות אלגברית, $a \in E$ ו- $b \in F$, אזי $F[a] = F[a + b] = F[ab]$.

$$\text{פיתרון 1: } x^4 - 9x^2 + 8 = (x^2 - 1)(x^2 - 8) = (x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8})$$

לכן, שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[2\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{8}] = \mathbb{Q}[\sqrt{8}, -\sqrt{8}]$. המימד של שדה הפיצול מעל \mathbb{Q} הוא 2.

פיתרון 2: יהי $\rho_7 = \exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$ - שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 7. השורשים של $x^7 - 7$ הם $\sqrt[7]{7}, \rho_7 \sqrt[7]{7}, \dots, \rho_6 \sqrt[7]{7}$ ולכן שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}, \rho_7]$.

מתקיים $[\mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}]: \mathbb{Q}] = 7$ ובתרגול הראינו שהפולינום המינימלי של ρ_7 הוא ממעלה 6 ולכן $[\mathbb{Q}[\rho_7]: \mathbb{Q}] = 6$. היות ו-6,7 זרים, לפי טענת העזר $[\mathbb{Q}[\sqrt[7]{7}, \rho_7]: \mathbb{Q}] = 6 \cdot 7 = 42$.

$$\text{פיתרון 3: } x^6 - x^3 - 2 = (x^3 - 2)(x^3 + 1) = (x^3 - 2)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

לכן, שורשי הפולינום $x^6 - x^3 - 2$ הם $\sqrt[3]{2}, \rho_3 \sqrt[3]{2}, \rho_3^2 \sqrt[3]{2}, -1, \rho_6, \rho_6^5$ (באשר $\rho_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$).
[בדקו שהשורשים של $x^2 - x + 1$ הם אכן ρ_6, ρ_6^5]. היות ו- $\rho_6^2 = \rho_3$ השדה $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_6]$ מכיל את כל שורשי הפולינום $x^6 - x^3 - 2$. מצד שני, הוא נוצר ע"י חלק מאותם שורשים ולכן $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_6]$ שדה הפיצול של $x^6 - x^3 - 2$.

מתקיים $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]: \mathbb{Q}] = 3$ ו- $[\mathbb{Q}[\rho_6]: \mathbb{Q}] = 2$ כי הפולינום המינימלי של ρ_6 הוא $x^2 - x + 1$ (הוא אי פריק כי אין לו שורש ב- \mathbb{Q}). לכן, לפי טענת העזר $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_6]: \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$.

הערה: התשובות $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_3]$ ו- $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$ גם נכונות כי $\mathbb{Q}[\rho_3] = \mathbb{Q}[\rho_6]$ (בדקו!).

שאלה 4

הוכח או הפרך: אם $F \subseteq K \subseteq L$ שדות ו- $\alpha \in L$ אלגברי מעל F , אז $[K[\alpha]: F[\alpha]] \mid [K: F]$.

הפרכה

נבחר $\alpha = \rho_3 \sqrt[3]{2} \in L$ ו- $F = \mathbb{Q}, K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}], L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_3]$.

1. הפולינום $x^3 - 2$ הוא אייזנשטיין (ביחס ל-2) ולכן אי פריק. α ו- $\sqrt[3]{3}$ הם שורשים שלו ולכן $[K[\alpha]: \mathbb{Q}] = \deg(x^3 - 2) = 3$.
2. מתקיים $K[\alpha] = K\left[\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}\right] = K[\rho_3] = L$.
3. הפולינום המינימלי של ρ_3 הוא $x^2 + x + 1$ (הוכחנו בשיעור) ולכן $[\mathbb{Q}[\rho_3]: \mathbb{Q}] = 2$. לכן, לפי טענת העזר $[K[\alpha]: \mathbb{Q}] = [K[\rho_3]: \mathbb{Q}] = [K: \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}[\rho_3]: \mathbb{Q}] = 3 \cdot 2 = 6$.
4. כעת מתקיים: $\frac{[K[\alpha]: \mathbb{Q}]}{[K[\alpha]: F[\alpha]]} = \frac{6}{3} = 2$ אבל $[K: F] = [K: \mathbb{Q}] = 3$ ו-2 לא מחלק את 3.