אנליזה מודרנית 1 - תרגול 8

18 בדצמבר 2014

הקשר בין אינטגרל רימן לאינטגרל לבג במרחב המידה $(\mathbb{R}, S, m)$

משפט

אם קיים אינטגרל רימן לf בקטע $[a,b]$, נסמנו ב$I := \int_a^b f(x)\,dx$ אזי קיים אינטגרל לבג ל f בקטע בקטע $[a,b]$ ומתקיים ש$I = \int_{[a,b]} f(x)\,dm$.

הערה סמנטית

האינטגרל קיים גם אם הוא לא סופי. כשאומרים אינטגרבילית משמע שהאינטגרל הוא סופי

הוכחה

יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר $\{x_k\} = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$ $\quad k = 1, 2, \ldots 2^n$. קיבלנו חלוקה של הקטע $[a,b]$ ל2^n קטעים. נגדיר מל

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}\\ \delta_n &= \frac{b-a}{2^n}\sum_{k}^{2^n} m_{nk}\end{aligned}$$

להיות סכומי דרבו, העליון והתחתון בהתאמה שמתאימים לf בכל קטע בחלוק. לפי הגדרת אינטגרל רימן

$$I = \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} \delta_n$$

נגדיר

$$\bar{f_n}, \underline{f}_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_n(k) :&= M_{nk} \quad x_{k-1} \le x < x_k\\ \underline{f}_n(k) &= m_{nk} \quad x_{k-1} \le x < x_k\end{aligned}$$

וכן:

$$\underline{f}_n(b)=\bar{f}_n(b)=f(b)$$

אזי, נובע ישירות מההגדרה:

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\bar{f}_n(x)\,dm &= \Delta_n\\ \int_{[a,b]}\underline{f}_n(x)\,dm &= \delta_n\end{aligned}$$

וגם:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(x) &\geq \cdots\geq f(x)\\ \underline{f}_1(x) &\leq \cdots\leq f(x)\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \lim_{n\to\infty}\bar{f}_n(x)\geq f(x)\\ \underline{f}(x) &= \lim_{n\to\infty}\underline{f}_n(x)\leq f(x)\end{aligned}$$

ומכאן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית (לוודא) מתקיים

$$\begin{aligned}(*)\quad \int_{[a,b]}\bar{f}(x)\,dm &= \lim_{n\to\infty}\int\bar{f}_n(x)\,dm=\lim_{n\to\infty}\Delta_n=I\\ &= \lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\underline{f}_n(x)\,dm\\ &= \int_{[a,b]}\underline{f}(x)\,dm\end{aligned}$$

לכן:

$$\int_{[a,b]}\left(\bar{f}-\underline{f}\right)(x)\,dm=0$$

לפי תרגיל שהוכחנו בעבר: $\bar{f}(x)=\underline{f}(x)$ כב"מ כלומר

$$f(x)=\bar{f}(x)=\underline{f}(x)$$

כב"מ. (כי $\underline{f}\leq f\leq\bar{f}$) . ז"א לפי $(*)$

$$\boxed{I=\int_{[a,b]}f(x)\,dm}$$

כנדרש.

פונקציות רציפות בהחלט

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ תקרא רציפה בהחלט $f\in AC\,[a,b]$ אם לכל $0<\epsilon$ קיים $\delta>0$ כך שלכל אוסף קטעים זרים $\{(x_i',x_i)\}_{i=1}^{n}$ המקיים:

$$\sum|x_i'-x_i|<\delta$$

מתקיים ש:

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i')-f(x_i)|<\epsilon$$

אחת התכונות של $f\in AC$: אם f רציפה בהחלט אזי $f\prime$קיימת כב"מ ומתקיים:

$$f(x)=\int_a^x f\prime(x)\,dm+f(a)$$

(כלומר אפשר לשחזר אותה מהנגזרת שלה).

אינטגרל סטילטיס

נניח $f\in C^1\,[a,b]$ (גזירה ברציפות) ולא יורדת.

תזכורת

$$\mu_f([a,b])=f(b)-f(a)$$

טענה

אם $f\in AC$ אזי A קבוצה מדידה μ_f אמ"מ היא מדידה לבג ומתקיים

$$\mu_f(A)=\int_A f'(x)\,dm$$

במקרה זה μ_f מידה רציפה בהחלט.

הסבר לטענה

השיוויון מתקיים עבור קטעים באשר f רציפה בהחלט כי:

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dm\quad f\in AC$$

לכן השיוויון הנ"ל מתקיים לכל A מדידה לבג. לפי תהליך ההרחבה המידה על האינטרוולים מגדירה באופן יחיד את המידה והקבוצות המדידות ע"י קירובים (לפי הבנייה) יישמר השיוויון.
μ_F מידת סטילטיס של F. תהי f מדידה μ_F . נסמן אינטגרל לבג סטילטיס μ_F של f על $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dF(x):=\int_{[a,b]}f(x)\,d\mu_F$$

שימו לב: מידת לבג מזדהה עם מידת סטילטיס של פונקציית הזהות

$$m\left([a,b]\right)=b-a=\int_{a}^{b}dm=\int_{a}^{b}dx$$

טענה

אם F רציפה בהחלט אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dF\left(x\right)=\int_{a}^{b}f\left(x\right)F'\left(x\right)dm$.

הוכחה

1. במקרה הראשון אם f קבועה ההוכחה מיידית מהרציפות בהחלט של F ומהגדרת μ_{F} (לפי הטענה הקודמת).
2. אם f פשוטה ומדידה לפי σ אדיטיביות של האינטגרל ולפי 1 נקבל שוב שיוויון כנדרש.
3. אם f מדידה כלשהי , $\left\{ f_{n}\right\}$ סידרת פונקציות פשוטות מדידות המתכנסת במ"ש לf ואז הסידרה $\left\{ f_{n}F'\right\}$ מכתנסת במ"ש לfF' . נניח $WLOG$ (כיון שהוכחנו שההגדרה לא תלויה בסדרות שבחרנו) לכן נוכל לבחור סידרה עולה לf) כי

$$f_{1}\left(x\right)\leq f_{2}\left(x\right)\leq\ldots$$

ולכן:

$$\left(f_{1}F'\right)\left(x\right)\leq\left(f_{2}F'\right)\left(x\right)\leq$$

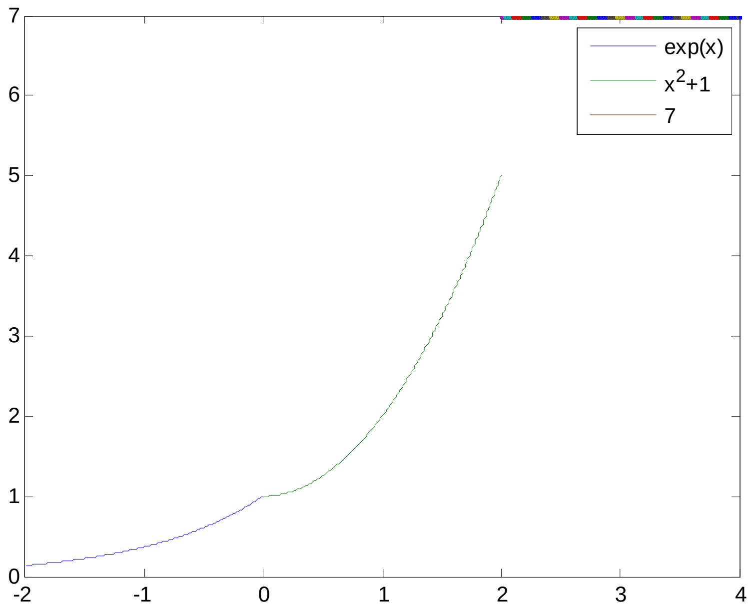
ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dF\left(x\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}\int_{a}^{b}f_{n}\left(x\right)dF\left(x\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}\int_{a}^{b}f_{n}\left(x\right)F'\left(x\right)dm=\int_{a}^{b}f\left(x\right)F'\left(x\right)dm$$

כנדרש.

תרגיל

תהי Fהמוגדרת לפי השרטוט הבא:



חשבו את $\int_A xdF\left(x\right)$ היכן ש:

1. $A=[3,\infty)$
2. $A=[1,3]$
3. $A=(-\infty,-2]$

פתרון

1. $F\mid_A=7$ רציפה בהחלט

$$\int_3^\infty xdF\left(x\right)=\int_3^\infty xF'\left(x\right)dm=\int_3^\infty 0dm=0$$

2. נחלק $A=A_1\sqcup A_2\sqcup A_3$. $A_1=[1,2),A_2=(2,3],A_3=\{2\}$ לפי אדיטיביות:

$$\int_A xdFx=\int_{A_1}xdFx+\int_{A_2}xdFx+\int_{A_3}xdFx$$

$$\int_{A_2} xdF(x) = 0$$

כמו קודם. F לא רציפה בA_3, לכן לא ב$A_2 \cup A_3$, בפרט לא רציפה בהחלט, לכן נחלק:

$$\int_{A_3} xF(x) = 2 \cdot \mu_F(A_3) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$F|_{A_1}(x) = x^2 + 1$$

רציפה בהחלט

$$\int_1^2 xdF(x) = \int_1^2 xF'(x)\,dm = \int_1^2 x \cdot 2xdm = \frac{14}{3}$$

ובסה"כ נקבל ש

$$\int_A xdF(x) = 4 + \frac{14}{3} = \frac{26}{3}$$

3. $F|_A(x) = e^x$.

$$\int_A xdF(x) = \int_{-\infty}^{-2} xF'(x)\,dm = \int_{-\infty}^{-2} xe^x dx$$

אינטגר' בחלקים כי היא אינטג' רימן:

$$= xe^x\Big|_{-\infty}^{-2} - \int_{-\infty}^{-2} e^x dx = -2e^{-2} - \lim_{x\to-\infty} xe^x - \left(e^{-2} - \lim_{x\to\infty} e^x\right) = -3e^{-2}$$

תרגיל

תהי $F(x)$ פונקציית קנטור (לא רציפה בהחלט - הראינו בתרגיל). חשבו את $I = \int_0^1 xdF(x)$.

פתרון

דרך ראשונה: נסמן $g(x) = x$ ונשים לב שמתקיים ש

$$\begin{aligned} g(1-x) &= 1 - g(x) \\ F(1-x) &= 1 - F(x) \end{aligned}$$

כיון ש $1-x$ חחע ועל $[0,1]$ מתקיים:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 xdF(x) = \int_1^0 (1-x)\,dF(1-x) = \int_1^0 (1-x)\,d(1-F(x)) = \int_1^0 (1-x)\,d(1) + \int_0^1 (1-x)\,dF \\ &= 0 + \int_0^1 1dF(x) - \int_0^1 xdF(x) = 1 - I \Rightarrow I = 1/2 \end{aligned}$$

בשיעור הבא נראה דרך נוספת לחישוב