

אנליזה מודרנית 1 - תרגול 8

18 בדצמבר 2014

הקשר בין אינטגרל רימן לאינטגרל לבג במרחב המידה $(\mathbb{R}, \mathcal{S}, m)$

משפט

אם קיים אינטגרל רימן ל- f בקטע $[a, b]$, נסמנו $I := \int_a^b f(x) dx$ אזי קיים אינטגרל לבג ל- f בקטע $[a, b]$ ומתקיים $I = \int_{[a,b]} f(x) dm$.

הערה סמנטית

האינטגרל קיים גם אם הוא לא סופי. כשאומרים אינטגרלית משמע שהאינטגרל הוא סופי

הוכחה

יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $\{x_k\} = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$ $k = 1, 2, \dots, 2^n$. קיבלנו חלוקה של הקטע $[a, b]$ ל- 2^n קטעים. נגדיר מל

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}$$
$$\delta_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_k m_{nk}$$

להיות סכומי דרבו, העליון והתחתון בהתאמה שמתאימים ל- f בכל קטע בחלוקה. לפי הגדרת אינטגרל רימן

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$$

נגדיר

$$\bar{f}_n, \underline{f}_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{f}_n(k) : = M_{nk} \quad x_{k-1} \leq x < x_k$$
$$\underline{f}_n(k) = m_{nk} \quad x_{k-1} \leq x < x_k$$

וכן:

$$\underline{f}_n(b) = \bar{f}_n(b) = f(b)$$

אזי, נובע ישירות מההגדרה:

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x) dm = \Delta_n$$
$$\int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) dm = \delta_n$$

וגם:

$$\bar{f}_1(x) \geq \dots \geq f(x)$$
$$\underline{f}_1(x) \leq \dots \leq f(x)$$

לכן:

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) \geq f(x)$$
$$\underline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n(x) \leq f(x)$$

ומכאן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית (לוודא) מתקיים

$$(*) \int_{[a,b]} \bar{f}(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \bar{f}_n(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = I$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) dm$$
$$= \int_{[a,b]} \underline{f}(x) dm$$

לכן:

$$\int_{[a,b]} (\bar{f} - \underline{f})(x) dm = 0$$

לפי תרגיל שהוכחנו בעבר: $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ כב"מ כלומר

$$f(x) = \bar{f}(x) = \underline{f}(x)$$

כב"מ. (כי $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$) . ז"א לפי (*)

$$I = \int_{[a,b]} f(x) dm$$

כנדרש.

פונקציות רציפות בהחלט

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ תקרא רציפה בהחלט $f \in AC[a, b]$ אם לכל $0 < \epsilon < \delta > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל אוסף קטעים זרים $\{(x'_i, x_i)\}_{i=1}^n$ המקיים:

$$\sum |x'_i - x_i| < \delta$$

מתקיים ש:

$$\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \epsilon$$

אחת התכונות של $f \in AC$: אם f רציפה בהחלט אזי f קיימת כב"מ ומתקיים:

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dm + f(a)$$

(כלומר אפשר לשחזר אותה מהנגזרת שלה).

אינטגרל סטילטיס

נניח $f \in C^1[a, b]$ (גזירה ברציפות) ולא יורדת.

תזכורת

$$\mu_f([a, b]) = f(b) - f(a)$$

טענה

אם $f \in AC$ אזי A קבוצה מדידה μ_f אמ"מ היא מדידה לבג ומתקיים

$$\mu_f(A) = \int_A f'(x) dm$$

במקרה זה μ_f מידה רציפה בהחלט.

הסבר לטענה

השיוויון מתקיים עבור קטעים באשר f רציפה בהחלט כי:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dm \quad f \in AC$$

לכן השיוויון הנ"ל מתקיים לכל A מדידה לבג. לפי תהליך ההרחבה המידה על האינטרוולים מגדירה באופן יחיד את המידה והקבוצות המדידות ע"י קירובים (לפי הבנייה) יישמר השיוויון. μ_F מידת סטילטיס של F . תהי f מדידה μ_F . נסמן אינטגרל לבג סטילטיס μ_F של f על $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dF(x) := \int_{[a,b]} f(x) d\mu_F$$

שימו לב: מידת לבג מזדהה עם מידת סטילטיס של פונקציית הזהות

$$m([a, b]) = b - a = \int_a^b dm = \int_a^b dx$$

טענה

אם F רציפה בהחלט אזי $\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dm$

הוכחה

1. במקרה הראשון אם f קבועה ההוכחה מיידית מהרציפות בהחלט של F ומהגדרת μ_F (לפי הטענה הקודמת).
2. אם f פשוטה ומדידה לפי σ אדיטיביות של האינטגרל ולפי 1 נקבל שוב שיוויון כנדרש.
3. אם f מדידה כלשהי, $\{f_n\}$ סידרת פונקציות פשוטות מדידות המתכנסת במ"ש ל' f ואז הסידרה $\{f_n F'\}$ מכתנסת במ"ש ל' $f F'$. נניח $WLOG$ (כיון שהוכחנו שההגדרה לא תלויה בסדרות שבחרנו) לכן נוכל לבחור סידרה עולה ל' f כי

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$$

ולכן:

$$(f_1 F')(x) \leq (f_2 F')(x) \leq \dots$$

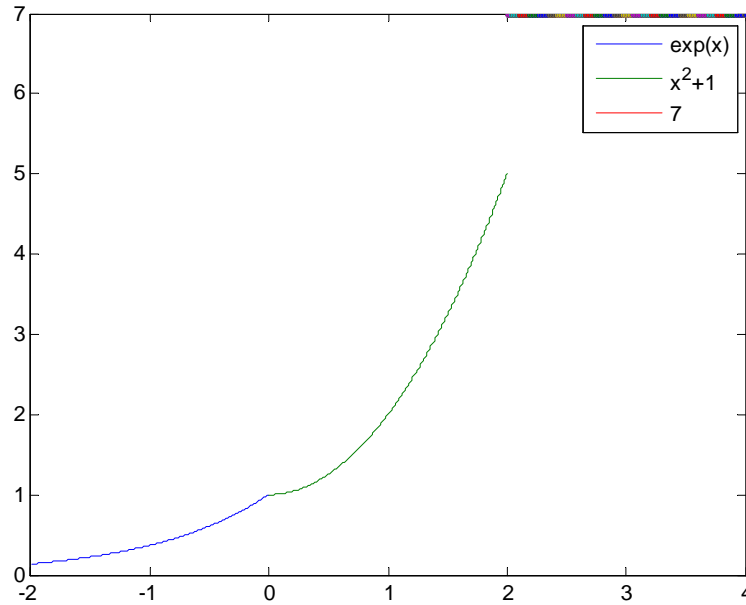
ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) F'(x) dm = \int_a^b f(x) F'(x) dm$$

כנדרש.

תרגיל

תהי F המוגדרת לפי השרטוט הבא:



חשבו את $\int_A x dF(x)$ היכן ש:

1. $A = [3, \infty)$

2. $A = [1, 3]$

3. $A = (-\infty, -2]$

פתרון

1. $F|_A = 7$ רציפה בהחלט

$$\int_3^\infty x dF(x) = \int_3^\infty x F'(x) dm = \int_3^\infty 0 dm = 0$$

2. נחלק $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$. $A_1 = [1, 2)$, $A_2 = (2, 3]$, $A_3 = \{2\}$ לפי אדיטיביות:

$$\int_A x dF x = \int_{A_1} x dF x + \int_{A_2} x dF x + \int_{A_3} x dF x$$

נחשב

$$\int_{A_2} x dF(x) = 0$$

כמו קודם. כעת, F לא רציפה ב- A_3 , לכן לא ב- $A_1 \cup A_3$, בפרט לא רציפה בהחלט, לכן נחלק:

$$\int_{A_3} xF(x) = 2 \cdot \mu_F(A_3) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$F|_{A_1}(x) = x^2 + 1$$

רציפה בהחלט ואיטגרבילית רימן

$$\int_1^2 x dF(x) = \int_1^2 xF'(x) dm = \int_1^2 x \cdot 2x dm = \frac{14}{3}$$

ובסה"כ נקבל ש

$$\int_A x dF(x) = 4 + \frac{14}{3} = \frac{26}{3}$$

$$.3 \quad F|_A(x) = e^x$$

$$\int_A x dF(x) = \int_{-\infty}^{-2} xF'(x) dm = \int_{-\infty}^{-2} xe^x dx$$

אינטגר' בחלקים כי היא אינטג' רימן:

$$= xe^x \Big|_{-\infty}^{-2} - \int_{-\infty}^{-2} e^x dx = -2e^{-2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - \left(e^{-2} - \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \right) = -3e^{-2}$$

תרגיל

תהי $F(x)$ פונקציית קנטור (לא רציפה בהחלט - הראינו בתרגיל). חשבו את $I = \int_0^1 x dF(x)$

פתרון

דרך ראשונה: נסמן $g(x) = x$ ונשים לב שמתקיים ש

$$g(1-x) = 1 - g(x)$$

$$F(1-x) = 1 - F(x)$$

כיון ש $1-x$ ו $1-x$ חחע ועל $[0,1]$ מתקיים:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x dF(x) = \int_1^0 (1-x) dF(1-x) = \int_1^0 (1-x) d(1-F(x)) = \int_1^0 (1-x) d(1) + \int_0^1 (1-x) dF \\ &= 0 + \int_0^1 1 dF(x) - \int_0^1 x dF(x) = 1 - I \Rightarrow I = 1/2 \end{aligned}$$

בשיעור הבא נראה דרך נוספת לחישוב