אנליזה מודרנית 1 - תרגול 8

26 בדצמבר 2014

הקשר בין אינטגרל רימן לאינטגרל לבג במרחב המידה $(\mathbb{R}, S, m)$

משפט

אם קיים אינטגרל רימן לf בקטע $[a,b]$, נסמנו ב $I := \int_a^b f(x)\,dx < \infty$ אזי f אינטגרבילית לבג בקטע $[a,b]$ ומתקיים ש $I = \int_{[a,b]} f(x)\,dm$.

הוכחה

יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר $\{x_k\} = a + \frac{k}{2^n}(b-a) \quad k = 1, 2, \ldots 2^n$. קיבלנו חלוקה של הקטע $[a,b]$ ל2^n קטעים. נגדיר מל

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}\\ \delta_n &= \frac{b-a}{2^n}\sum_{k}^{2^n} m_{nk}\end{aligned}$$

להיות סכומי דרבו, העליון והתחתון בהתאמה שמתאימים לf בכל קטע בחלוק. לפי הגדרת אינטגרל רימן

$$I = \lim_{n\to\infty}\Delta_n = \lim_{n\to\infty}\delta_n$$

נגדיר

$$\bar{f_n}, \underline{f}_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_n(k): &= M_{nk} \quad x_{k-1} \le x < x_k\\ \underline{f}_n(k) &= m_{nk} \quad x_{k-1} \le x < x_k\end{aligned}$$

וכן:

$$\underline{f}_n(b) = \bar{f}_n(b) = f(b)$$

אזי, נובע ישירות מההגדרה:

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x)\,dm &= \Delta_n\\ \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\,dm &= \delta_n\end{aligned}$$

וגם:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(x) &\geq \cdots \geq f(x)\\ \underline{f}_1(x) &\leq \cdots \leq f(x)\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x) \geq f(x)\\ \underline{f}(x) &= \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n(x) \leq f(x)\end{aligned}$$

ומכאן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית (לוודא) מתקיים

$$\begin{aligned}(*)\quad \int_{[a,b]} \bar{f}(x)\,dm &= \lim_{n\to\infty}\int \bar{f}_n(x)\,dm = \lim_{n\to\infty}\Delta_n = I\\ &= \lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\,dm\\ &= \int_{[a,b]} \underline{f}(x)\,dm\end{aligned}$$

לכן:

$$\int_{[a,b]} \left(\bar{f}-\underline{f}\right)(x)\,dm = 0$$

לפי תרגיל שהוכחנו בעבר: $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ כב"מ כלומר

$$f(x) = \bar{f}(x) = \underline{f}(x)$$

כב"מ. (כי $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$) . ז"א לפי $(*)$

$$\boxed{I = \int_{[a,b]} f(x)\,dm}$$

כנדרש.

פונקציות רציפות בהחלט

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ תקרא רציפה בהחלט $f\in AC[a,b]$ אם לכל $0<\epsilon$ קיים $\delta>0$ כך שלכל אוסף קטעים זרים $\{(x_i',x_i)\}_{i=1}^n$ המקיים:

$$\sum |x_i' - x_i| < \delta$$

מתקיים ש:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_{i}'\right)-f\left(x_{i}\right)\right|<\epsilon$$

אחת התכונות של $f\in AC$: אם f רציפה בהחלט אזי $f\prime$קיימת כב"מ ומתקיים:

$$f\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\prime\left(t\right)dm+f\left(a\right)$$

(כלומר אפשר לשחזר אותה מהנגזרת שלה).

אינטגרל סטילטיס

נניח $f\in C^{1}\left[a,b\right]$ (גזירה ברציפות) ולא יורדת.

תזכורת

$$\mu_{f}\left(\left[a,b\right]\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

טענה

אם $f\in AC$ אזי A קבוצה מדידה μ_{f} אמ"מ היא מדידה לבג ומתקיים

$$\mu_{f}\left(A\right)=\int_{A}f'\left(x\right)dm$$

במקרה זה μ_{f} מידה רציפה בהחלט.

הסבר לטענה

השיוויון מתקיים עבור קטעים באשר f רציפה בהחלט כי:

$$f\left(x\right)=f\left(a\right)+\int_{a}^{x}f'\left(t\right)dm\quad f\in AC$$

לכן השיוויון הנ"ל מתקיים לכל A מדידה לבג. לפי תהליך ההרחבה המידה על האינטרוולים מגדירה באופן יחיד את המידה והקבוצות המדידות ע"י קירובים (לפי הבנייה) יישמר השיוויון. μ_{F} מידת סטילטיס של F. תהי f מדידה μ_{F} . נסמן אינטגרל לבג סטילטיס μ_{F} של f על $\left[a,b\right]$:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dF\left(x\right):=\int_{\left[a,b\right]}f\left(x\right)d\mu_{F}$$

שימו לב: מידת לבג מזדהה עם מידת סטילטיס של פונקציית הזהות

$$m\left(\left[a,b\right]\right)=b-a=\int_{a}^{b}dm=\int_{a}^{b}dx$$

טענה

אם F רציפה בהחלט אזי $\int_a^b f\left(x\right)dF\left(x\right)=\int_a^b f\left(x\right)F'\left(x\right)dm$.

הוכחה

1. במקרה הראשון אם f קבועה ההוכחה מיידית מהרציפות בהחלט של F ומהגדרת μ_F (לפי הטענה הקודמת).
2. אם f פשוטה ומדידה לפי σ אדיטיביות של האינטגרל ולפי 1 נקבל שוב שיוויון כנדרש.
3. אם f מדידה כלשהי , $\{f_n\}$ סידרת פונקציות פשוטות מדידות המתכנסת במ"ש לf ואז הסידרה $\{f_nF'\}$ מכתנסת במ"ש לfF' . נניח $WLOG$ (כיון שהוכחנו שההגדרה לא תלויה בסדרות שבחרנו) לכן נוכל לבחור סידרה עולה לf) כי

$$f_1\left(x\right)\le f_2\left(x\right)\le\dots$$

ולכן:

$$\left(f_1F'\right)\left(x\right)\le\left(f_2F'\right)\left(x\right)\le$$

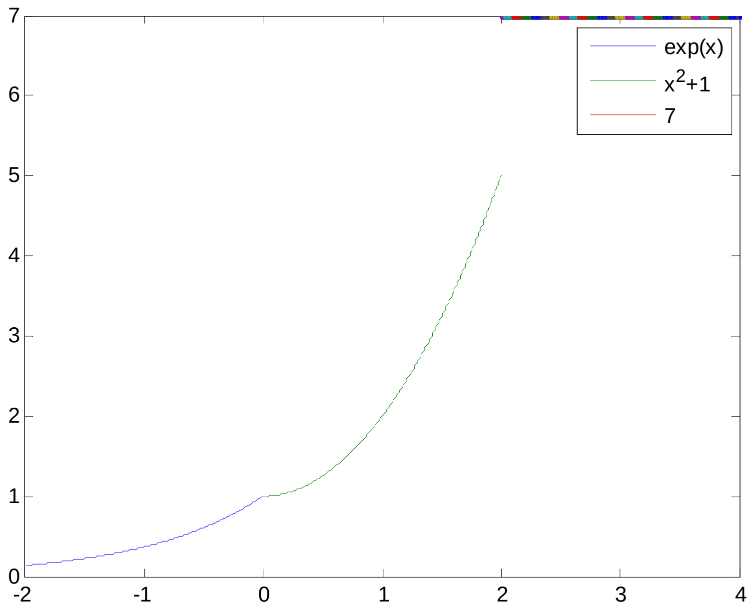
ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int_a^b f\left(x\right)dF\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\left(x\right)dF\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\left(x\right)F'\left(x\right)dm=\int_a^b f\left(x\right)F'\left(x\right)dm$$

כנדרש.

תרגיל

תהי Fהמוגדרת לפי השרטוט הבא:



חשבו את $\int_A xdF\left(x\right)$ היכן ש:

1. $A=[3,\infty)$
2. $A=[1,3]$
3. $A=(-\infty,-2]$

פתרון

1. $F\mid_A=7$ רציפה בהחלט

$$\int_3^\infty xdF\left(x\right)=\int_3^\infty xF'\left(x\right)dm=\int_3^\infty 0dm=0$$

2. נחלק $A=A_1\sqcup A_2\sqcup A_3$. $A_1=[1,2),A_2=(2,3],A_3=\{2\}$ לפי אדיטיביות:

$$\int_A xdFx=\int_{A_1}xdFx+\int_{A_2}xdFx+\int_{A_3}xdFx$$

נחשב

$$\int_{A_2} xdF\left(x\right)=0$$

כמו קודם. כעת, F לא רציפה בA_3, לכן לא ב$A_1\cup A_3$, בפרט לא רציפה בהחלט, לכן נחלק:

$$\int_{A_3} xF\left(x\right)=2\cdot\mu_F\left(A_3\right)=2\cdot 2=4$$

$$F\mid_{A_1}\left(x\right)=x^2+1$$

רציפה בהחלט ואיטגרבילית רימן

$$\int_1^2 xdF\left(x\right)=\int_1^2 xF'\left(x\right)dm=\int_1^2 x\cdot 2xdm=\frac{14}{3}$$

ובסה"כ נקבל ש

$$\int_A xdF\left(x\right)=4+\frac{14}{3}=\frac{26}{3}$$

3. $F\mid_A\left(x\right)=e^x$.

$$\int_A xdF\left(x\right)=\int_{-\infty}^{-2} xF'\left(x\right)dm=\int_{-\infty}^{-2} xe^x dx$$

אינטגר' בחלקים כי היא אינטג' רימן:

$$=xe^x\Big|_{-\infty}^{-2}-\int_{-\infty}^{-2} e^x dx=-2e^{-2}-\lim_{x\to-\infty} xe^x-\left(e^{-2}-\lim_{x\to\infty} e^x\right)=-3e^{-2}$$

תרגיל

תהי $F\left(x\right)$ פונקציית קנטור (לא רציפה בהחלט - הראינו בתרגיל). חשבו את $I=\int_0^1 xdF\left(x\right)$.

פתרון

דרך ראשונה: נסמן $g\left(x\right)=x$ ונשים לב שמתקיים ש

$$\begin{aligned} g\left(1-x\right) &= 1-g\left(x\right) \\ F\left(1-x\right) &= 1-F\left(x\right) \end{aligned}$$

כיון ש $1-x$ חחע ועל $[0,1]$ מתקיים:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 xdF(x) = \int_1^0 (1-x)\,dF(1-x) = \int_1^0 (1-x)\,d(1-F(x)) \\ &= \int_1^0 (1-x)\,d(1) + \int_0^1 (1-x)\,dF(x) \\ &= 0 + \int_0^1 1dF(x) - \int_0^1 xdF(x) = 1 - I \Rightarrow I = 1/2 \end{aligned}$$

בשיעור הבא נראה דרך נוספת לחישוב