<u>הערה:</u> לפי ב) $S \subset L^p(\mu)$.

<u>נראה</u> כי לכל $f\in L^p(\mu)$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $S \ni z$

כך ש- $\|f-s\|_p<\varepsilon$

$|s|\le|f|$

ובפרט: אם $f\ge 0$ אזי $0\le z$

<u>הוכחה:</u> לפי (ב):

$S=\{s \mid s\in L^p(\mu)$ פשוטה $\}$

תהי $f\in L^p(\mu)$. מקרה א': $f\ge 0$ (מדידה)

מקרה זה, לפי משפט הקירוב, קיימת סדרה $(s_n)_n$

של פשוטות, כך ש- $0\le s_n\le s_{n+1}\le f$

ולכל $x\in X$: (ומעשה - במ"ש)

$$s_n(x) \xrightarrow{\text{מונו}} f(x)$$

$|s_n|^p\le|f|^p\in L^1(\mu)$ כי $f\in L^p(\mu)$.

s_n מדידה, לכן $s_n\in L^p(\mu)$ (כי $|s_n|^p\in L^1(\mu)$)

ולכן $s_n\in S$.

ובנוסף $|f-s_n|^p\to 0$ נקודתית (כמ"ש ..) כי ההתכנסות

- $|f-s_n|^p$ מדידה.

$|f-s_n|^p\le|f|^p\in L^1(\mu)$ לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת.

$$\int_X |f-s_n|^p\,d\mu \to \int_X 0\,d\mu=0$$

$\Leftarrow$ $\|f-s_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ כנדרש

$f^+ = \max\{0, f\}$
$f^- = \max\{0, -f\}$

מקרה ב' (המקרה הכללי):

$$f = f^+ - f^-$$

כאשר $0 \le f^+, f^- \in L^p(\mu)$ וכן $f^+ \cdot f^- \equiv 0$

לפי המקרה הראשון, קיימות סדרות $(s_n^-)_n$, $(s_n^+)_n$ של פשו"מ ב-S

כך ש- $0 \le s_n^+ \le f^+$; ו- $\|f^+ - s_n^+\|_p \to 0$

$0 \le s_n^- \le f^-$; ו- $\|f^- - s_n^-\|_p \to 0$

נגדיר: $s_n = s_n^+ - s_n^-$ ודאי $s_n \in S$ (כי S מ"ו מעל R)

$$0 \le s_n^+ s_n^- \le f^+ f^- = 0 \Rightarrow s_n^+ s_n^- = 0$$

$$\Rightarrow |s_n|^2 = (s_n^+ - s_n^-)^2 = (s_n^+)^2 + (s_n^-)^2$$

$$\le (f^+)^2 + (f^-)^2 = (f^+ - f^-)^2 = |f|^2$$

לכן $|s_n| \le |f|$

$$0 \le \|f - s_n\|_p = \|(f^+ - s_n^+) - (f^- - s_n^-)\|_p \le$$

$$\underset{\text{מינקובסקי}}{\le} \|f^+ - s_n^+\|_p + \|f^- - s_n^-\|_p \to 0$$

לכן

$$\|f - s_n\|_p \to 0$$

<u>תרגיל</u>: יהי H מרחב הילברט ו- M תת מרחב ליניארי סגור של H.

הוכיחו כי $(M^\perp)^\perp = M$.

<u>פתרון</u>: $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ כי לכל $f \in M$, $g \in M^\perp$

$$= 0 \quad \langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle} \,.$$

לכן $f \in (M^\perp)^\perp$.

נוכיח $(M^\perp)^\perp \subseteq M$: M תת מ"ל סגור של H - הילברט.

לכן: $H = M \oplus M^\perp$ (משפט הפירוק הניצב)

כעת, לכל $f \in (M^\perp)^\perp$:

$$f = \underset{M}{\underset{\uparrow}{g}} + \underset{M^\perp}{\underset{\in}{h}}$$

הראינו $M \subseteq (M^\perp)^\perp \Rightarrow g \in (M^\perp)^\perp$

$$(M^\perp)^\perp \ni f - g = h \in M^\perp$$

- לפי לינ' כהפרש איברים מהם (כי זהו תת ליניארי)

<u>אבל</u> - $(M^\perp)^\perp \cap M^\perp = \{0\} \Rightarrow f-g=0 \Rightarrow f = g \in M$

$$\Rightarrow (M^\perp)^\perp \subseteq M$$

ובסה"כ $(M^\perp)^\perp = M$ כנדרש.

תרגיל: נגדיר: $F := \{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty \}$

הוכיחו או הפריכו:

א) F תמ״ ליניארי של ℓ^2.

ב) הקבוצה $F \cap \ell^2$ סגורה ב-ℓ^2.

פתרון: א) נוכיח כי F תמ״ ליניארי של ℓ^2:

ברור כי $0 \in F$, ובנוסף:

$$(a_n),(b_n) \in F \Rightarrow \sup_n n|a_n| \,,\, \sup_n n|b_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n(|a_n|+|b_n|) < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|a_n+b_n| < \infty \Rightarrow (a_n+b_n) \in F$$

$$(a_n)\in F,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|\alpha a_n| = \alpha \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \alpha(a_n) \in F$$

הוכחנו כי F מרחב ליניארי.

נראה כי $F \subseteq \ell^2$: תהי $(a_n)\in F$ אזי:

$$M := \sup_n n|a_n| < \infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \ n|a_n| < M$$

$$\Rightarrow |a_n| \le \frac{M}{n}$$

כעת, הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ מתכנס, ולכן (לפי מבחן ההשוואה) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ מתכנס, לכן $(a_n) \in \ell^2$ – כנדרש.

ב) נמצא דוגמא נגדית: לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$a_k = (a_n^k) := \begin{cases} a_n^k = \frac{1}{n^{3/4}} & n \le k \\ a_n^k = 0 & n > k \end{cases}$$

אזי: הסדרה a_k מתכנסת ב-ℓ^2 ל: $a=(a_n)=\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)_{\mathbb{N}}$

שכן: $$\|a-a_k\|_2 = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

(זנב של טור מספרים מתכנס)

בנוסף, לכל k: $$\sup_n n|a_n^k| = k^{1/4} < \infty$$

ולכן $a_k=(a_n^k)\in F\overset{(k)}{\subseteq}\ell^2 \Rightarrow a_k\in F\cap\ell^2$.

אולם $\lim_{k\to\infty} a_k = a \notin F$ שכן:

$$\sup_n n|a_n| = \sup_n n^{1/4} = \infty$$

ולכן: $F\cap\ell^2$ לא סגורה ב-ℓ^2.

נגדיר:

$$f(x,y) := \frac{e^{-xy}-e^{-x}}{x}$$

$$F(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx$$

יהי $y_0\in(0,\infty)$, ו- $\{a_n\}_N$ סדרה עם השאיפה 0.

אזי:

$$\frac{F(y_0+a_n)-F(y_0)}{a_n} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{f(x,y_0+a_n)-f(x,y_0)}{a_n}}_{=\,f_n(x)}\,dx$$

אזי:

$$\forall x\in(0,\infty):\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y} = -e^{-xy_0}$$

נניח שקיימת $g\in L^1(0,\infty)$ כך ש- $\forall n: |f_n|\le g$

אזי, לפי משפט ההתכנסות השולטת

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(y_0+a_n)-F(y_0)}{a_n} = \lim_n \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_n f_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty -e^{-xy_0}\,dx = \frac{e^{-xy_0}}{y_0}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{y_0}$$

מכיון שהבחירה של $y_0\in(0,\infty)$, ושל $(a_n)_N\xrightarrow{n\to\infty}0$ היא שרירותית

נקבל ש F גזירה ב $(0,\infty)$ ומתקיים:

$$F(y)=\ln\frac{1}{y}+C \Leftarrow F'(y)=-\frac{1}{y}$$

אבל $F(1)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-x}}{x}\,dx = 0 = -\ln(1)$

לכן $C=0$ $\quad F(y)=\ln(\frac{1}{y})-1$

נותר להוכיח קיום של מז'ורנטה g.

לכל n, f רציפה וגזירה לפי y, לכן לפי משפט הערך הממוצע

קיימים c_n: $0\neq|c_n|\leq|a_n|\to 0$ כך ש:

$$f_n(x)=\frac{f(x,y_0+a_n)-f(x,y_0)}{a_n}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y_0+c_n)=e^{-x(y_0+c_n)}$$

$\Leftarrow$ (עבור n מספיק גדול) $\quad \frac{y_0}{2}<y_0+c_n$

$\Leftarrow$ $\quad |f_n(x)|=e^{-x(y_0+c_n)}=(e^{-x})^{y_0+c_n}\underset{0<e^{-x}<1}{<}e^{-\frac{xy_0}{2}}$

לכן $g(x):=e^{-\frac{xy_0}{2}}\underset{\text{קל לבדוק.}}{\in} L^1(0,\infty)$ מהווה מז'ורנטה, כנדרש.

תרגיל: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה. הראו שכמעט לכל $x\in A$

מתקיים:

$$\lim_{y\to 0}\frac{d(x+y,A)}{|y|}=0$$

כאשר: $d(a,B):=\inf\{|a-b| \mid b\in B\}$ $\quad a\in\mathbb{R}$, $B\subseteq\mathbb{R}$

הוכחה: מספיק להראות לכל נק' צפיפות (כלומר, נק' המקיימת את משפט הצפיפות).

יהי $0<\varepsilon$, נראה שקיימת $\delta>0$ כך שאם $|y|<\delta$ מתקיים:

$$\frac{d(x+y,A)}{|y|}<\varepsilon .$$

תהי $x\in A$ נק' צפיפות:

$$\frac{m(A\cap[x-\varepsilon,x+\varepsilon])}{2\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}1$$

לכן, עבור $\alpha:=1-\frac{\varepsilon}{2}$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $|y|<\delta$

$$\frac{m(A\cap B(x,|y|))}{2|y|}>\alpha .$$

נניח בשלילה ש- $\frac{d(x+y,A)}{|y|}\geq\varepsilon \quad (*)$, ונניח בה"כ $0<y$,

אז עכן:

$$A\cap(x+y-\varepsilon y,\, x+y]=\phi$$

אחרת, יש נק' ב A שהמרחק בינה ובין $x+y$ קטן מ- $\varepsilon|y|$ בסתירה ל $(*)$. לכן:

$$\alpha=1-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{m(A\cap[x-y,x+y])}{2y}\leq\frac{m([x-y,x+y-\varepsilon y])}{2y}=\frac{2y-\varepsilon y}{2y}=1-\frac{\varepsilon}{2}.\ \Rightarrow$$ סתירה! קשט

כיון שהמידה מונוטונית $A\cap B(x,y)\subseteq B(x,y+\varepsilon y)$ +

והנימוק: $A\cap(x-y-\varepsilon y,x+y]=\phi$ ולכן!
$A\cap[x-y,x+y+\varepsilon y)=A\cap B(x,y+\varepsilon y)$

לכן $\frac{d(x+y,A)}{|y|}<\varepsilon$. ומכיון ש-$\varepsilon$ נבחר שרירותית הוכחנו את הנדרש.