

תרגיל 5 - חשבון אינפי 3 תש"פ - בוגרים

צורת רישום. את הדיפרנציאל של f ב a נסמן על ידי $Df(a)$. נסמן על ידי

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

את הגרדיאנט של f (וקטור שורה של הנגזרות החלקיות של f ב a). לעיתים, נסמן $f'_{x_i}(a)$ במקום $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

תרגיל 1. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את הגבול ואת הגבולות החוזרים ב $(0, 0)$ או שהראו שהם אינם קיימים.

1. $f(0, 0) = \frac{x-y}{x+y}$

2. $f(x, y) = (x+y) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$

3. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

4. $f(x, y) = \frac{x+\sin(y)}{x+y}$

תרגיל 2. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

1. $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y}$

2. $f(x, y) = e^{\cos xy}$

3. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4. $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 - z^3)$

תרגיל 3. תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x, y)$. הראו, ש f דיפרנציאבילית בכל $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ומתקיים: $Df(a, b)(u, v) = bu + av$.

תרגיל 4. האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. $f(x, y) = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

תרגיל 5. תהינה $f(x, y)$ ו $g(x, y)$ פונקציות דיפרנציאביליות ב $(0, 0)$. נגדיר:

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ g(x, y) & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו שאם $f(0, 0) = g(0, 0)$, $f'_x(0, 0) = g'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0) = g'_y(0, 0)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

תרגיל 6. נגדיר $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 & x \neq 0 \\ y^2 & x = 0 \end{cases}$$

1. הראו ש f רציפה ב $(0, 0)$.

2. מצאו את הנגזרות החלקיות של f ב $(0, 0)$.

3. הראו ש f דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

4. הראו ש f'_x אינה רציפה ב $(0, 0)$.

תרגיל 7. (ממבחן) תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

1. הראו ש f רציפה ב $(0, 0)$.

2. האם f דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$?