

## תרגיל 5 - חשבון אינפי 3 תש"פ - בוגרים

צורת רישום. את הדיפרנציאל של  $f$  ב  $a$  נסמן על ידי  $Df(a)$ . נסמן על ידי

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

את הגרדיאנט של  $f$  (וקטור שורה של הנגזרות החלקיות של  $f$  ב  $a$ ). לעיתים, נסמן  $f'_{x_i}(a)$  במקום  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

**תרגיל 1.** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את הגבול ואת הגבולות החוזרים ב  $(0, 0)$  או שהראו שהם אינם קיימים.

$$1. f(x, y) = (x + y) \left( \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$3. f(x, y) = \frac{x + \sin(y)}{x + y}$$

**תרגיל 2.** חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

$$1. f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y}$$

$$2. f(x, y) = e^{\cos xy}$$

$$3. f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**תרגיל 3.** תהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי  $f(x, y) = xy$ . הראו, ש  $f$  דיפרנציאבילית בכל  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ומתקיים:  $Df(a, b)(u, v) = bu + av$ .

**תרגיל 4.** האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב  $(0, 0)$ ?

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$2. f(x, y) = \left( x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \right)^3$$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**תרגיל 5.** נגדיר  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 & x \neq 0 \\ y^2 & x = 0 \end{cases}$$

1. הראו ש  $f$  רציפה ב  $(0, 0)$ .

2. מצאו את הנגזרות החלקיות של  $f$  ב  $(0, 0)$ .

3. הראו ש  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ .

4. הראו ש  $f'_x$  אינה רציפה ב  $(0, 0)$ .

**תרגיל 6.** (ממבחן) תהי  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

1. הראו ש  $f$  רציפה ב  $(0, 0)$ .

2. האם  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ ?