

אלגברה לינארית 2 | תשע"ט מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

סכום האיברים של כל שורה במטריצה הפיכה A שווה ל λ , צ"ל: סכום האיברים של כל שורה במטריצה ההפיכה A^{-1} שווה ל λ^{-1}

נשים לב שאם נכפול את המטריצה בוקטור

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ובעצם קל להוכיח שאם λ ע"ע של A אזי λ^{-1} ע"ע של A^{-1}
הרי $Av = \lambda v$ ונכפול את שני הצדדים ב A^{-1}

$$A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$$

$$\lambda^{-1}v = A^{-1}v$$

ולכן λ^{-1} ערך עצמי של A^{-1} עם הוקטור העצמי v המתאים, אשר סוכם את השורות, ולכן סכום כל שורה ב A^{-1} שווה ל λ^{-1} .

(סעיף ב)

תהי A מטריצה מרוכבת, נראה שקיימות שתי מטריצות הפיכות שסכומן הוא A ע"י מציאתן.
ניקח $x \neq 0$ כך ש $x \notin \sigma(A)$. וברור שסכום המטריצות $B = xI, C = A - xI$ הוא A
הפיכה, זה ברור.
 A הפיכה משום ש x לא ע"ע ולכן

$$\det(C) = \det(A - xI) \neq 0$$

כלומר A הפיכה

(לחילופין אפשר להגיד שמרחב האפס שלה הוא 0 בלבד), וסיימנו.

שאלה 2

(סעיף א)

תהי A מטריצה מרוכבת עם פולינום אופייני $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$, $p_A(x) = (x-1)^4(x-2)^4$ וכן ריבוי גיאומטרי של הע"ע 1 שווה 2. נמצא צורת ז'ורדן

חזקה בפולינום המינימלי	ריבוי גיאומטרי	ריבוי אלגברי	ערך עצמי/תכונה
2	2	4	1
1	הבלוק המקסימלי מגודל 1, ולכן חייבים להיות 4	4	2

ניזכר כי:

ריבוי אלגברי-סכום סדרי הבלוקים המתאימים לערך העצמי

ריבוי גיאומטרי- כמות הבלוקים

חזקה בפולינום המינימלי- גודל הבלוק המקסימלי

ונבנה

$$J(A) = J_2(1) \oplus J_2(1) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2)$$

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

(סעיף א)

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; יהי $V = R(A)$ ויהי $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

צריך למצוא בסיס $W = \text{span}\{u\}^\perp$

ראינו בהרצאה ש $W = u^\perp$

כלומר $W = \{w \in V | w \perp u\} = \{w \in R(A) | \langle w, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rangle = 0\}$

כעת $C(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \right\}$

כלומר שני התנאים שלנו הן

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}\right\}$$

$$w = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \text{ כעת}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 2 & -4 & w_2 \\ 3 & 8 & w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 4 & -8 & 2w_2 \\ 9 & -24 & 3w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 4 & -8 & 2w_2 \\ 4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = w_1, \beta = -\frac{1}{4}w_1 \text{ מקבלים}$$

$$2w_2 = 4\alpha - 8\beta = 6w_1 \text{ ואז}$$

$$w_2 = 3w_1, w_3 = \frac{1}{3}(-w_1 - w_2) = -\frac{4}{3}w_1 \text{ כלומר}$$

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} w_1 \\ 3w_1 \\ -\frac{4}{3}w_1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}\right\} \text{ סך הכל קיבלנו}$$

(סעיף ב)

במרחב V ממימד n נתונים תתי מרחבים U, W שניהם ממימד m

נתון גם וקטור $u \in U, u \neq 0$ כך ש $u \perp W$.

צ"ל: קיים $w \in W, w \neq 0$ כך ש $w \perp U$.

הוכחה נניח בשלילה כי $W \cap U^\perp = \{0\}$

$\dim W = m$, לכן $\dim U^\perp = n - m$. כעת נסמן בסיסים

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$B_{U^\perp} = \{u'_1, \dots, u'_{n-m}\}$$

$$B_V = B_W \cup B_{U^\perp}$$

משום שכל הוקטורים בת"ל, ובגודל המתאים- מהשלישי חינם.

ידוע כי קיים $u \in V$ כך ש $u \perp W$. לכן $u \in W^\perp$ אבל ניתן להוסיפו לבסיס והוא יישאר בת"ל

(הוא שייך ל u ושונה מאפס לכן לא שייך ל U^\perp , ומצד שני הוא לא שייך ל W מהיותו שייך ל W^\perp ושונה מאפס)

זוהי סתירה כי קיבלנו בסיס גדול מהמימד.

כלומר קיים $w \in W$ ששייך גם ל U^\perp כלומר $w \perp U$.

שאלה 4

הפרכה
נמצא פולינום אופייני $A = \begin{pmatrix} 6 & 4a \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-6 & -4a \\ -9 & x+6 \end{pmatrix} = x^2 - 36 - 36a$$

היא לא לכסינה לכל a למשל עבור $a = -2$ נקבל פולינום אופייני $x^2 + 36$
שהוא מתאפס או מ"ל, אין ערכים עצמיים ולכן לא לכסינה.

שאלה 5

אם הפולינום המינימלי של A הוא $x^3 - x$ אז הפולינום המינימלי של A^2 הוא $x^2 - x$
הוכחה ידוע כי $A^3 - A = 0$
נכפול ב- A , $A^4 - A^2 = 0$, כלומר $p(x) = x^2 - x$ הוא פולינום מאפס של A^2
ולכן

$$m_A(x) \in \{x, x-1, x^2-x\}$$

אם $m_A(x) = x$ אז $A^2 = 0$ הפולינום המינימלי מדרגה קטנה מ-3 בסתירה,
וכן עבור $m_A(x) = x-1$, כי אז מתקבל ש- $q(x) = x^2 - 1$ פולינום מאפס ל- A והמינימלי בדרגה נמוכה מ-3 בסתירה.
נשארו עם $m_A(x) = x^2 - x$

שאלה 6

הפרכה נניח בשלילה קיימת A מרוכבת כך ש- $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

אבל מתקיים כי $(A^3)^3 = 0$

$A^9 = 0$, A נילפוטנטית מסדר 9 ולכן יש לה ע"ע יחיד 0

לכן מתקיים $p_A(x) = x^3$

אבל מצד אחד A^3 שווה לנתון, ומצד שני לפי קיילי המילטון $A^3 = p_A(A) = 0$

שאלה 7

הוכחה מתקיים $A + A^* = I$

נוכיח שהיא לכסינה אוניטרית.

ראשית מעל \mathbb{C} כל פולינום מ"ל, נותר להוכיח נורמליות. נבודד את A^*

$$A^* = -A + I$$

כעת, מצד אחד $AA^* = A^2 + A$

ומצד שני $A^*A = A^2 + A$

ולכן $AA^* = A^*A$

שאלה 8

הוכחה מתקיים כי $A^2 = I$

כלומר $A^2 - I = 0$ והפולינום המינימלי מחלק את הפולינום $x^2 - 1$

$$m_A(x) \in \{x - 1, x + 1, (x - 1)(x + 1)\}$$

ובכל מקרה הוא מתפרק לגורמים לינאריים שונים, A לכסינה ומפעילים גראם שמידט על המטריצה המלכסנת (עמודותיה) ומקבלים לכסינה אוניטרית.

שאלה 9

הוכחה תהי A מרוכבת וצמודה לעצמה, נוכיח $A - (i + 1)I$ הפיכה

ידוע כי כל הערכים העצמיים של מטריצה צמודה לעצמה ממשיים, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

כעת בפרט $i + 1$ אינו ערך עצמי ולכן

$$\det(A - (i + 1)I) \neq 0$$

ולכן היא הפיכה.