אלגברה לינארית 2 | תשע"ט מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

סכום האיברים של כל שורה במטריצה הפיכה A שווה לλ, צ"ל: סכום האיברים של כל שורה במטריצה ההפיכה A^{-1} שווה לλ^{-1}

נשים לב שאם נכפול את המטריצה בוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ נקבל $Av = \lambda v$

ובעצם קל להוכיח שאם λ ע"ע של A אזי λ^{-1} ע"ע של A^{-1}

הרי $Av = \lambda v$ ונכפול את שני הצדדים בA^{-1}

$$A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$$

$$\lambda^{-1}v = A^{-1}v$$

ולכן λ^{-1} ערך עצמי של A^{-1} עם הוקטור העצמי v המתאים, אשר סוכם את השורות, ולכן סכום כל שורה בA^{-1} שווה לλ^{-1}.

(סעיף ב)

תהי A מטריצה מרוכבת, נראה שקיימות שתי מטריצות הפיכות שסכומן הוא A ע"י מציאתן.

ניקח $x \neq 0$ כך ש$x \notin \sigma(A)$. וברור שסכום המטריצות $B = xI, C = A - xI$ הוא A

B הפיכה, זה ברור.

A הפיכה משום שx לא ע"ע ולכן

$$det(C) = det(A - xI) \neq 0$$

כלומר A הפיכה

(לחילופין אפשר להגיד שמרחב האפס שלה הוא 0 בלבד), וסיימנו.

שאלה 2

(סעיף א)

תהי A מטריצה מרוכבת עם פולינום אופייני $p_A(x)=(x-1)^4(x-2)^4$, $m_A(x)=(x-1)^2(x-2)$
וכן ריבוי גיאומטרי של הע"ע 1 שווה ל2. נמצא צורת ז'ורדן

ערך עצמי/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
1	4	2	2
2	4	הבלוק המקסימלי מגודל 1, ולכן חייבים להיות 4	1

ניזכר כי:

ריבוי אלגברי- סכום סדרי הבלוקים המתאימים לערך העצמי

ריבוי גיאומטרי- כמות הבלוקים

חזקה בפולינום המינימלי- גודל הבלוק המקסימלי

ונבנה

$$J(A)=J_2(1)\oplus J_2(1)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)$$

$$J(A)=\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

(סעיף א)

תהי $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$; יהי $V=R(A)$ ויהי $u=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$
צריך למצוא בסיס $W=span\{u\}^{\perp}$
ראינו בהרצאה ש$W=u^{\perp}$
כלומר $W=\{w\in V|w\perp u\}=\{w\in R(A)|<\begin{pmatrix}w_1&w_2&w_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}>=0\}$
כעת $C(A)=span\{\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4&-8\end{pmatrix}\}$
כלומר שני התנאים שלנו הן

$$w_1+2w_2+3w_3=0$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \in span\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}\}$$

כעת $w = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 2 & -4 & w_2 \\ 3 & 8 & w_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 4 & -8 & 2w_2 \\ 9 & -24 & 3w_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 4 & -8 & 2w_2 \\ 4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

מקבלים $\alpha = w_1, \beta = -\frac{1}{4}w_1$
ואז $2w_2 = 4\alpha - 8\beta = 6w_1$
כלומר $w_2 = 3w_1, w_3 = \frac{1}{3}(-w_1 - w_2) = \frac{-4}{3}w_1$
סך הכל קיבלנו $W = span\{\begin{pmatrix} w_1 \\ 3w_1 \\ \frac{-4}{3}w_1 \end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}\}$

(סעיף ב)

במרחב V ממימד n נתונים תתי מרחבים U, W שניהם ממימד m
נתון גם וקטור $u \neq 0$, $u \in U$ כך ש$u \perp W$.
צ"ל: קיים $0 \neq w \in W$ כך ש$w \perp U$.
הוכחה נניח בשלילה כי $W \cap U^\perp = \{0\}$
$dimW = m$, לכן $dimU^\perp = n - m$. כעת נסמן בסיסים

$$B_W = \{w_1, ..., w_m\}$$

$$B_{U^\perp} = \{u'_1, ..., u'_{n-m}\}$$

$$B_V = B_W \cup B_{U^\perp}$$

משום שכל הוקטורים בת"ל, ובגודל המתאים- מהשלישי חינם.
ידוע כי קיים $u \in V$ כך ש$u \perp W$. לכן $u \in W^\perp$ אבל ניתן להוסיפו לבסיס והוא יישאר בת"ל
(הוא שייך לו ושונה מאפס לכן לא שייך ל$U^\perp$, ומצד שני הוא לא שייך לW מהיותו שייך ל$W^\perp$ ושונה מאפס)
וזוהי סתירה כי קיבלנו בסיס גדול מהמימד.
כלומר קיים $w \in W$ ששיך גם ל$U^\perp$ כלומר $w \perp U$.

שאלה 4

<u>הפרכה</u>
$A = \begin{pmatrix} 6 & 4a \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, נמצא פולינום אופייני

$$p_A(x) = det\begin{pmatrix} x-6 & -4a \\ -9 & x+6 \end{pmatrix} = x^2 - 36 - 36a$$

היא לא לכסינה לכל a למשל עבור $a = -2$ נקבל פולינום אופייני $x^2 + 36$
שאינו מתאפס או מל"ל, אין ערכים עצמיים ולכן לא לכסינה.

שאלה 5

אם הפולינום המינימלי של A הוא $x^3 - x$ אז הפולינום המינימלי של A^2 הוא $x^2 - x$
<u>הוכחה</u> ידוע כי $A^3 - A = 0$
נכפול בA, $A^4 - A^2 = 0$
כלומר $p(x) = x^2 - x$ הוא פולינום מאפס של A^2
ולכן

$$m_A(x) \in \{x, x-1, x^2 - x\}$$

אם $m_A(x) = x$ אז $A^2 = 0$ הפולינום המינימלי מדרגה קטנה מ-3 בסתירה,
וכן עבור $m_A(x) = x - 1$, כי אז מתקבל ש$q(x) = x^2 - 1$ פולינום מאפס לA והמינימלי בדרגה נמוכה מ-3 בסתירה.
נשארנו עם $m_A(x) = x^2 - x$

שאלה 6

<u>הפרכה</u> נניח בשלילה קיימת A מרוכבת כך ש $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
אבל מתקיים כי $(A^3)^3 = 0$
$A^9 = 0$, A נילפוטנטית מסדר 9 ולכן יש לה ע"ע יחיד 0
לכן מתקיים $p_A(x) = x^3$
אבל מצד אחד A^3 שווה לנתון, ומצד שני לפי קיילי המילטון $A^3 = p_A(A) = 0$

שאלה 7

הוכחה מתקיים $A + A^* = I$
נוכיח שהיא לכסינה אוניטרית.
ראשית מעל $\mathbb{C}$ כל פולינום מל"ל, נותר להוכיח נורמליות. נבודד את A^*

$$A^* = -A + I$$

כעת, מצד אחד $AA^* = A^2 + A$
ומצד שני $A^*A = A^2 + A$
ולכן $AA^* = A^*A$

שאלה 8

הפרכה מתקיים כי $A^2 = I$
ניקח $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, מתקיים $A^2 = I$
אבל היא לא אוניטרית כי עמודותיה אינן מהוות בסיס אורתונורמלי.

שאלה 9

הוכחה תהי A מרוכבת וצמודה לעצמה, נוכיח $A - (i+1)I$ הפיכה
ידוע כי כל הערכים העצמיים של מטריצה צמודה לעצמה ממשיים, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$
כעת בפרט $i + 1$ אינו ערך עצמי ולכן

$$det(A - (i+1)I) \neq 0$$

ולכן היא הפיכה.