פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 2 לאודיסאה –04/07/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \arctan(x^2)$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל$f(x)$.

ראשית נשים לב כי

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

הטור ההנדסי דיי דומה לזה

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נציב במקום המשתנה את $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

נחשב אינטגרל $\int_0^x$

קודם על צד שמאל:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x)$$

ולכן

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

לבסוף נציב x^2 במקום המשתנה

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

ב. חשבו את $f^{(38)}(0)$.

נזכור שלפי טיילור המקדם בטור טיילור של x^{38} הוא

$$\frac{f^{(38)}(0)}{38!}$$

ומצד שני, רואים שבטור הטיילור שחישבנו בסעיף א' מתקיים כי האיבר בחזקת 38 מתקבל כאשר האינדקס הוא $n=9$ והוא

$$\frac{(-1)^9}{18+1}x^{38}$$

לכן סה"כ

$$f^{(38)}(0)=-\frac{38!}{19}$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקצית הגבול של הסדרה $f(x)$.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $(-\infty,\infty)$.

3. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית שאינה קבועה אפס, ותהי $f(x)$ פונקציה גזירה המקיימת לכל x כי $u\big(x,f(x)\big)=0$.

א. הוכיחו כי לכל x אם $u_y\big(x,f(x)\big)\neq 0$ אזי $f'(x)=-\frac{u_x(x,f(x))}{u_y(x,f(x))}$.

ראשית נסמן

$$h(x)=u\big(x,f(x)\big)$$

וכיוון שu דיפרנציאבילית וכן f גזירה לפי כלל השרשרת

$$h'(x)=u_x\big(x,f(x)\big)\cdot 1+u_y\big(x,f(x)\big)\cdot f'(x)$$

אבל נתון כי $h(x)=0$ תמיד! ולכן כמובן גם נגזרתו שווה אפס

$$u_x\big(x,f(x)\big)\cdot 1+u_y\big(x,f(x)\big)\cdot f'(x)=0$$

לפי הנתון הביטוי הימני בצד השמאלי שונה מאפס ולכן מותר לחלק בו ונקבל

$$f'(x)=-\frac{u_x\big(x,f(x)\big)}{u_y\big(x,f(x)\big)}$$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $u_x\big(a,f(a)\big)=0$ אזי $f'(a)=0$.

נבחר בפונקציה

$$u(x,y)=y^2-x^2$$

$$u_x = -2x$$

וב$a = 0$

מתקיים כי $u_x(0, f(0)) = 0$

עבור $f(x) = x$

$$f'(0) = 1 \neq 0$$

4. נביט בפונקציה $f(x, y) = x^2 + x^3 - y + y^3 + 1$
   א. מצאו את הכיוון בו הנגזרת מקסימלית בנקודה $(1,1)$.
   ב. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x, y)$ (מקס' מקומי, מינ' מקומי, אוכף).
5. יהי בית שתחום הרצפה שלו הוא $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ וגובה התקרה שלו הוא $f(x, y) = e^x$.
   מצאו את שטח הפנים הכולל של הבית (רצפה, קירות ותקרה).

נתחיל מהרצפה, כי זה בפער הכי קל:

<u>הרצפה</u>:

הרצפה היא סה"כ ריבוע עם צלע באורך 1 ולכן שטחו הוא 1.

<u>הקירות</u>:

צריך 4 פרמטריזציות, לכל אחד מן הקירות. הכיוון לא משנה כיוון שזה אינטגרל קווי מסוג ראשון.

הקיר הצפוני בין $(0,1), (1,1)$ נסמנו בC_1

$$\overrightarrow{r_1}(t) = (t, 1), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_1} f(x, y) dr = \int_0^1 f(\overrightarrow{r_1}(t)) \cdot |\overrightarrow{r_1'}(t)| dt = \int_0^1 e^t \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = [e^t]_0^1 = e - 1$$

הקיר המערבי

$$\overrightarrow{r_2}(t) = (0, t), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_2} f(x, y) dr = \int_0^1 f(\overrightarrow{r_2}(t)) \cdot |\overrightarrow{r_2'}(t)| dt = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{0 + 1^2} dt = [t]_0^1 = 1$$

הקיר הדרומי

$$\overrightarrow{r_3}(t) = (t, 0), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_3} f(x, y) dr = \int_0^1 f(\overrightarrow{r_3}(t)) \cdot |\overrightarrow{r_3'}(t)| dt = \int_0^1 e^t \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = [e^t]_0^1 = e - 1$$

הקיר המזרחי

$$\overrightarrow{r_4}(t) = (1,t), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_4} f(x,y)dr = \int_0^1 f\left(\overrightarrow{r_4}(t)\right) \cdot \left|\overrightarrow{r_4'}(t)\right| dt = \int_0^1 e \cdot \sqrt{0^2+1^2}dt = [et]_0^1 = e$$

סה"כ שטח הקירות הוא

$$e - 1 + 1 + e - 1 + e = 3e - 1$$

<u>התקרה</u>:

כעת צריך אינטגרל משטחי מסוג ראשון של הפונקציה 1 על המשטח M שהוא גרף הפונקציה והפרמטריזציה שלו היא:

$$\vec{s}(x,y) = \left(x,y,f(x,y)\right), \qquad (x,y) \in D$$

$$\iint_M 1dS = \iint_D 1 \cdot \left|\vec{s}_x \times \vec{s}_y\right| dxdy = \int_0^1 \int_0^1 1 \cdot \sqrt{(-e^x)^2 + 0^2 + 1^2}dxdy$$

כיוון ש

$$\vec{s}_x \times \vec{s}_y = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & e^x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-e^x, 0,1)$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^1 \sqrt{e^{2x}+1}dx = \left\{\begin{matrix} t = \sqrt{e^{2x}+1} \\ t^2 = e^{2x}+1 \\ e^{2x} = t^2 - 1 \\ 2x = \ln(t^2-1) \\ x = \dfrac{\ln(t^2-1)}{2} \\ dx = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2t}{t^2-1}dt \end{matrix}\right\} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} t \cdot \frac{t}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \left[1 + \frac{1}{t^2-1}\right] dt$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{t^2-1}$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

נציב $t = \pm 1$ ונקבל כי

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]$$

ולכן שטח התקרה הוא

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \left[1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]\right] dt \; = \left[t+\frac{1}{2}\ln(t-1)-\frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}$$

סה"כ שטח הפנים של הבית הוא הזוועה האחרונה ועוד $3e$.

6. נביט במשטחים

$$M=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le 4, z=0\}$$
$$T=\left\{(x,y,z)|z=\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

ובשדה הוקטורי

$$\vec{F}=x\hat{\imath}+z\hat{\jmath}+\hat{k}$$

נשים לב כי המשטח M הוא מעגל ברדיוס 2 המוכל במישור xy.

כמו כן, המשטח T הוא החצי העליון של הספירה שמרכזה ראשית הצירים ורדיוסה 2.

שני המשטחים ביחד סוגרים מעטפת (אך זה לא לגמרי רלוונטי לתרגיל), ויש להם שפה משותפת (וזה כן רלוונטי).

כיוון שמדובר באינטגרל משטחי מסוג שני על הרוטור, נשתמש במשפט סטוקס ונאמר שזה האינטגרל הקווי מסוג שני של הפונקציה של השדה הוקטורי על השפה, ולכן מספיק לחשב את אחד האינטגרלים משני הסעיפים בלבד.

כמו כן צריך לשים לב לכיוון המסילה, כיוון ששני הנורמלים באותו הכיוון (כלפי מעלה) נלך על המסילה באותו הכיוון בשני האינטגרלים והם אכן שווים.

כמו כן, במקום לחשב כל אחד מהאינטגרלים הללו, מותר לחשב את האינטגרל הקווי לפי סטוקס.

א. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_M rot(\vec{F})\cdot\hat{n}dS$, כאשר הנורמל בעל רכיב ציר z חיובי.

בהתאם להסברים לעיל נחשב את

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}$$

כאשר C היא שפת המשטחים נגד כיוון השעון (הסטנדרטי) ולכן הפרמטריזציה של השפה היא

$$\vec{r}(t)=(2\cos(t), 2\sin(t), 0)$$
$$t\in[0,2\pi]$$

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt=\int_0^{2\pi}(2\cos(t), 0,1)\cdot(-2\sin(t), 2\cos(t), 0)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}-4\cos(t)\sin(t)\,dt=-2\int_0^{2\pi}\sin(2t)\,dt=[\cos(2t)]_0^{2\pi}=0$$

ב. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_T rot(\vec{F})\cdot\hat{n}dS$, כאשר הנורמל בעל רכיב ציר z חיובי.

התשובה היא אפס לפי ההסברים לעיל.

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dxdy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dxdy$ הוא השטח של התחום D.

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dxdy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y) \in D \qquad (u, v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \cdot |J| dudv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x, y) \in D \qquad (r, \theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D'} f\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) rdrd\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dxdydz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1 dxdydz$ הוא הנפח של התחום V.

חישוב אינטגרלים משולשים

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dxdydz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u,v,w)$$
$$y = y(u,v,w)$$
$$z = z(u,v,w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (u,v,w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)|J|dudvdw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \cdot rdrd\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = rsin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = rsin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = rcos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,\phi) \in V'$$

$$\iiint_V f dxdydz = \iiint_{V'} f\big(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), rcos(\theta)\big) \cdot r^2 \sin(\theta)\, drd\theta d\phi$$

אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} dt$$

אינטרגלים קוויים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$
$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t)\right)$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\left(x(t), y(t)\right) \cdot \left(x'(t), y'(t)\right) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(r(t)\right) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t)\right)$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P\left(\vec{r}(t)\right) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q\left(\vec{r}(t)\right) \cdot y'(t) dt$$

משפט גרין

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות

אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב לC נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $curl(\vec{F})$ על התחום D.

נסמן

$$\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D curl(\vec{F}) dxdy = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקצית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| dudv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ויהי כיוון לנורמל למשטח.

אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) dudv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V div(\vec{F}) dxdydz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dxdydz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \iint_M rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$