

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 5: חוקי שימור, משוואות המילטון וסוגרי פואסון

1. הלגרנגיאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.

האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנגיאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי

תחת טרנספורמצית סיבוב $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$.

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. הוכיחו כי שני לגראנגיאנים $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונ-

קציה של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q}, t)$, כלומר $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q}, t)/dt$, שומרים

על משוואות התנועה (רמז: הוכיחו כי $\delta S' = 0$, כאשר $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$ הפעולה

המתאימה ל \mathcal{L}' וידוע כי $\delta S = 0$).

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית

הנעה במהירות קבועה $\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$ ביחס למעבדה.

(א) קבלו את הלגרנגיאן במעלית \mathcal{L} ובמעבדה \mathcal{L}' (רשמו את הפוטנציאלים

ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta, t)/dt$

כאשר $f(\theta, t) = -mv_0 \ell \cos \theta - \frac{1}{2}mgv_0 t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 t$.

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור \mathcal{L} ו \mathcal{L}' וודאו כי הן אכן זהות.

4. קורדינטות פאראבוליות (ξ, η, ϕ) מוגדרות ע"י הטרנספורמציות

$$x = \xi \eta \cos \phi, \quad y = \xi \eta \sin \phi, \quad z = (\eta^2 - \xi^2)/2$$

(א) רשמו את הלגרנגיאן של חלקיק חפשי עם מסה m בקורדינטות

פאראבוליות

(ב) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ, p_η, p_ϕ) .

(ג) מצאו את ההמילטוניאן.

5. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

(א) אנטסימטריות $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ולכן $\{f, f\} = 0$

(ב) $\{f, const\} = 0$

(ג) לינאריות $\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\}$

(ד) זהות יעקובי $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

(ה) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$

6. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג

כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$, $a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$

(א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\}$, $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a^*, \mathcal{H}\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 6. ד. השוו לחישוב הישיר.