תרגיל בית 8

1. התסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על $[-1,1]$:

$$f=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

א. האם הפונקציה גזירה?
ב. האם הפונקציה רציפה ליפשיץ?
ג. האם לפונקציה השתנות חסומה?

פתרון:

א. הפונקציה כמובן גזירה והנגזרת הינה

$$f'=\begin{cases} 2x\sin\left(1/x^2\right)-\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נראה רק כי הפונקציה אכן גזירה ב $x=0$. מתקיים $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(1/h^2\right)}{h}=0$

ב. מכיוון שהנגזרת f' איננה חסומה בקטע $[-1,1]$ נובע כי לכל $M,\varepsilon>0$ קיים $-1\le x_0\le 1$ כך ש $f'(x_0)>M+\varepsilon$ מכאן שקיים $h>0$ כך ש $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>M$ ומכאן שהפונקציה איננה רציפה ליפשיץ.

ג. מספיק לבדוק מהן התנודות בין הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל

$$2x\sin\left(1/x^2\right)-\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right)=0\Leftrightarrow\tan\left(1/x^2\right)=\frac{1}{x^2}$$

עבור $x\approx 0$ נקבל כי $1/x^2\to\infty$ ולכן פתרונות המשוואה באופן אסימפטוטי יהיו $1/x^2\approx\pi/2+\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$ גדול. מכאן ש $x\approx\sqrt{\frac{2}{\pi+2\pi k}}$ ולכן התנודות סביב הנקודה $x=0$ של הפונקציה יהיו

$$TV(f)\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi+2\pi(k+1)}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)\right)-\frac{2}{\pi+2\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi+2\pi 2k}+\frac{2}{\pi+2\pi(2k-1)}$$

ברור כי הטור האחרון מתבדר כמו טור הרמוני ולכן לפונקציה אין השתנות חסומה.

2. נניח ו f הינה פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו f רציפה בהחלט על $(a,1]$ לכל $a\in(0,1)$. האם f בהכרח רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם בנוסף f הינה בעלת השתנות חסומה ב $[0,1]$ האם אז f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם לא, תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ניקח לדוגמא את הפונקציה בשאלה הראשונה. מכיוון ש f תהיה אז גזירה ברציפות בקטע $(a,1]$ לכל $a\in(0,1)$ אזי היא רציפה ליפשיץ ולכן רציפה בהחלט. אבל מכיוון שאיננה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ אז נובע כי איננה רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$. לעומת זאת, אם בנוסף f בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ נובע כי f גזירה בקטע $[0,1]$ ולכן $\int_0^x f'\le f(x)-f(0)$. אבל f רציפה בהחלט על $(a,1]$ ולכן $\int_0^x f'=\int_0^a f'+\int_a^x f'=\int_0^a f'+f(x)-f(a)$. נשאיף את a ל 0 ומכיוון ש f רציפה ומתכונות האינטגרל נובע כי $\lim_{a\to 0}\int_0^a f'+f(x)-f(a)=f(x)-f(0)$. ולכן בסה"כ נקבל כי $\int_0^x f'=f(x)-f(0)$, כלומר f רציפה בהחלט.

3. נניח ו f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$ ולכל $A\subseteq[0,1]$ נגדיר $f(A)=\{f(x):x\in A\}$. הראו כי אם A הינה בעלת מידת לבג 0 אזי $f(A)$ בעלת מידת לבג 0.

פתרון: מכיוון ש f רציפה בהחלט נובע כי היא בעלת השתנות חסומה ולכן ניתן לפרק אותה להפרש של שתי פונקציות עולות. מכיוון ש f רציפה בהחלט, ניתן להראות כי $f=f_1-f_2$ כאשר f_1,f_2 רציפות בהחלט ועולות. מכיוון ש $m(A)=0$ נובע כי נוכל למצוא קבוצה פתוחה O כך ש $A\subseteq O$ $m(O)<\varepsilon$. נוכל לרשום $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר $\{I_n\}$ קטעים זרים. מכיוון ש f_1 הינה פונקציה עולה נובע כי $\{f_1(I_n)\}$ הינם קטעים(אולי טריויאלים) זרים (אולי פרט לנקודון) וכי

$$m(f_1(A))=m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right)\Leftarrow f_1(A)\subseteq\bigcup_i f_1(I_i)$$

מכיון ש f_1 עולה ורציפה ברור כי המידה של תמונה של קטע (x_1,x_2) תהיה $f(x_2)-f(x_1)$

נסמן $I_n=(a_n,b_n)$, f_1 רציפה בהחלט ולכן קיימת הנגזרת f_1' וכן

$\int_{a_i}^{b_i} f_1'dm = f_1(b_i)-f_1(a_i)$.

$$m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m\left(f(I_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty} f_1(b_i)-f_1(a_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_i}^{b_i} f_1'dm$$

$$=\int_O f_1'dm$$

כאשר השיוון האחרון נובע מכך ש $f'\geq 0$ כב"מ. מכאן ש

$$m(O)\to 0\Rightarrow \int_O f_1'dm\to 0$$

ומכאן ש $m\left(f_1(O)\right)\to 0$. באותו אופן נראה כי $m\left(f_2(O)\right)\to 0$. נסמן ב

$f_1(I_i)=(a_i^1,b_i^1),\ f_2(I_i)=(a_i^2,b_i^2)$ ונשים לב כי

$$f\left((a_i,b_i)\right)\subseteq\left(b_i^1-a_i^2,a_i^1-b_i^2\right)$$

$$\Rightarrow m\left(f\left((a_i,b_i)\right)\right)\leq b_i^1-a_i^2-\left(a_i^1-b_i^2\right)=m\left(f_1\left((a_i,b_i)\right)\right)+m\left(f_2\left((a_i,b_i)\right)\right)$$

$$\Rightarrow m\left(f(A)\right)\leq m\left(f(O)\right)\leq m\left(f_1(O)\right)+m\left(f_2(O)\right)\underset{m(O)\to 0}{\longrightarrow}0$$

מכאן ש $m\left(f(A)=0\right)$. מש"ל.