תרגיל בית 8

1. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ. תהי $\rho=\mu+\nu$. שימו לב כי $\mu \ll \rho$ וגם כי $\nu \ll \rho$. הוכיחו כי אם $f=\frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g=\frac{d\nu}{d\rho}$ אזי
   א. $f>0$ כב"מ μ .
   ב. $f+g=1$ כב"מ ρ .
   ג. $d\nu=\frac{g}{f}d\mu$.

2. תהי ν מידה סופית. הוכיחו כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס למידה μ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\mu(A)<\delta$ אזי $\nu(A)<\varepsilon$ לכל קבוצה מדידה A . (הדרכה : לצד השני, הניחו בשלילה כי לכל $\delta=2^{-k}$ קיימת A_n כך ש $\mu(A_n)<2^{-k}$ אבל $\nu(A_n)>\varepsilon$. הסתכלו על הקבוצה $E_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$. מה המידה של $\mu(E_k)$ כאשר $k\to\infty$? מה המידה של $\nu(E_k)$ כאשר $k\to\infty$?

3. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu\ll\nu$ ו $\mu=gd\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרבילית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int fgd\nu=\int fd\mu$$

4. <u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$.