תרגיל בית 8

1. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ. תהי $\rho=\mu+\nu$. שימו לב כי $\mu \ll \rho$ וגם כי $\nu \ll \rho$. הוכיחו כי אם $f=\frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g=\frac{d\nu}{d\rho}$ אזי

   א. $f>0$ כב"מ μ.

   ב. $f+g=1$ כב"מ ρ.

   ג. $d\nu=\frac{g}{f}d\mu$.

פתרון:

א. מהנתון כי $\nu \ll \mu$ נובע כי $\rho \ll \mu$. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל A מדידה מתקיים

$$\mu(A)=\int_A fd\rho$$

נניח בשלילה ש א' אינו מתקיים. אזי קיימת בהכרח קבוצה מדידה E כך ש $\mu(E)>0$ וגם $f=0$ על E. אבל אז $\mu(E)=\int_A fd\rho=0$. בסתירה להנחה ש $\mu(E)>0$.

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי $\mu(A)=\int_A fd\rho$ וגם כי $\nu(A)=\int_A gd\rho$ לכל A מדידה. מכאן שעבור כל A מדידה נובע כי

$$\int 1_A(f+g)d\rho=\int 1_A fd\rho+\int 1_A gd\rho$$
$$=\mu(A)+\nu(A)=\rho(A)=\int 1_A d\rho$$

לכן נובע כי $f+g=1$ כב"מ ρ.

ג. קודם כל נתחיל בהערה, ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם $z(x)$ פונקציה מדידה אזי נובע כי אם $\int zd\nu<\infty$ וגם $\int zd\mu<\infty$ אזי $\int zd\mu=\int zfd\rho$ וגם $\int zd\nu=\int zgd\rho$. לכן נסמן לפעמים $d\nu=gd\rho$. עפ"י משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית h כך ש $\nu(A)=\int 1_A hd\mu$ לכל A מדידה. מצד שני

$$\int 1_A g d\rho = \nu(A) = \int 1_A h d\mu =$$
$$\int 1_A h d\mu = \int 1_A h f d\rho$$

ומכאן ש כב"מ ρ $h = \frac{g}{f} \Leftarrow g = fh$.

2. תהי ν מידה סופית. הוכיחו כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס למידה μ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(A) < \delta$ אזי $\nu(A) < \varepsilon$ לכל קבוצה מדידה A. (הדרכה : לצד השני, הניחו בשלילה כי לכל $\delta = 2^{-k}$ קיימת A_n כך ש $\mu(A_n) < 2^{-k}$ אבל $\nu(A_n) > \varepsilon$. הסתכלו על הקבוצה $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. מה המידה של $\mu(E_k)$ כאשר $k \to \infty$? מה המידה של $\nu(E_k)$ כאשר $k \to \infty$?

פתרון:
$\Rightarrow$: תהי A מדידה אזי אם $\mu(A) = 0$ אזי ברור כי $\nu(A) < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $\nu(A) = 0$
$\Leftarrow$: נניח בשלילה כי לכל $\delta = 2^{-k}$ קיימת A_n כך ש $\mu(A_n) < 2^{-k}$ אבל $\nu(A_n) > \varepsilon$. נסתכל על הקבוצה $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, זוהי קבוצה יורדת, כלומר $E_k \supseteq E_{k+1}$, ולכן $\mu(E_k) \le \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \to 0$ כאשר $k \to \infty$ ואם נגדיר $E = \bigcap_k E_k$ אזי נובע כי $\mu(E_k) = 0$. לעומת זאת, מכיוון ש ν סופית, נובע כי $\nu(E_k) < \infty$ ולכן עפ"י רציפות המידה נובע כי $\lim \nu(E_k) = \nu(E)$. אבל $\nu(E_k) > \varepsilon$ ולכן $\nu(E) > \varepsilon$ בסתירה לנתון כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס למידה μ.

3. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu \ll \nu$ ו $\mu = g d\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרבילית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int fg d\nu = \int f d\mu$$

פתרון: נרשום $f=f^{+}+f^{-}$. נקרב את f^{+} ע"י פונקציות פשוטות φ_n כך ש $\int\varphi_n d\mu\uparrow\int fd\mu$. נשים לב כי עבור כל פונקציית אינדיקטור מתקיים $\int 1_A fd\nu=\int 1_A d\mu$. ולכן הדבר נכון גם עבור פונקציות פשוטות. מכאן שמתקיים $\int f^{+}d\mu=\lim\int\varphi_n d\mu=\lim\int\varphi_n gd\nu\overset{MCT}{=}\int f^{+}gd\nu$. נראה את אותו הדבר עבור f^{-} וסיימנו.

4. <u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $\left[0,1\right]$.

פתרון: צריכים לתפוס את התנודות של הפונקציה. $\sin\frac{1}{x}$ מחזירה 1+ בנקודות $x_k=\frac{2}{\pi+4\pi k}$ ומחזירה -1 בנקודות $x_k=\frac{2}{3\pi+4\pi k}$. לכל N נגדיר שוב חלוקה "מתחלפת"

$$P_N:\frac{2}{\pi}>\frac{2}{3\pi}>\ldots>\frac{2}{\pi+4\pi k}>\frac{2}{3\pi+4\pi k}>\ldots>\frac{2}{\pi+4\pi N}>\frac{2}{3\pi+4\pi N}$$

מקבלים

$$\begin{aligned}&v\left(f,P_N\right)\geq\\&\left|\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right|+\\&\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi N\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi N\right)\right|=\\&=\left|\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3\pi}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}+\frac{2}{3\pi+4\pi N}\right|=\\&=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{\left(4k+1\right)\left(4k+3\right)}\end{aligned}$$

וכאשר $N\to\infty$ מקבלים טור מתבדר. מכאן ה-sup הוא אינסוף.