

נוסחאות של משטחים

נוסחאות כלליות:

א. משטח $S \subseteq \mathbb{R}^3$ יש פרמ' מקומית $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ חלקה ($U \subseteq \mathbb{R}^2, Im(X) \subseteq S$) בסביבה של כל נקודה $p \in Im(X)$. נקרא פה למשתנים של X ו- v . נסמן X'_1 לנגזרת לפי u ו- X'_2 לנגזרת לפי v . צריך להתקיים ש- $X'_1(u, v)$ ו- $X'_2(u, v)$ בת"ל לכל $(u, v) \in U$.

לפי ההגדרה

$$g_{ij}(u, v) = \langle X'_i(u, v), X'_j(u, v) \rangle$$

המקדמים g_{ij} נקראים "התבנית היסודית הראשונה". הם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j .
הוקטור נורמל הוא:

$$N(u, v) = \frac{1}{\|X'_1(u, v) \times X'_2(u, v)\|} (X'_1(u, v) \times X'_2(u, v))$$

$X'_1(u, v)$, $X'_2(u, v)$ ו- $N(u, v)$ הם בסיס למרחב עבור כל (u, v) . ולכן לכל (u, v) ישנם מקדמים $L_{ij}(u, v)$, $\Gamma_{ij}^k(u, v)$ שמקיימים:

$$X''_{ij}(u, v) = \Gamma_{ij}^1(u, v)X'_1(u, v) + \Gamma_{ij}^2(u, v)X'_2(u, v) + L_{ij}(u, v)N(u, v)$$

אפשר לחשב את המקדמים L_{ij} , הקרואים "התבנית היסודית השנייה", ע"י

$$L_{ij}(u, v) = \langle X''_{ij}(u, v), N(u, v) \rangle$$

הם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j .

המקדמים $\Gamma_{ij}^k(u, v)$ נקראים סימני כריסטופל. הם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j אבל לא ביחס להחלפת k אם כל אחד מהפרמטרים האחרים. בשביל לחשב אותם נגדיר:

$$g_{ij:1}(u, v) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u}(u, v), g_{ij:2}(u, v) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v}(u, v)$$

ובנוסף נגדיר את $g^{ij}(u, v)$ להיות המקדמים של המטריצה G^{-1} הפוכה ל

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

g^{ij} גם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j .

ניתן לחשב את סימני כריסטופל לפי הנוסחא

$$\Gamma_{ij}^k(u, v) = \frac{1}{2} (g_{im:j} + g_{jm:i} - g_{ij:m}) g^{mk}$$

זה בסכימת איינשטיין. ז"ז שאמור להיות שם $\sum_{m=1}^2$.

הוקטורים $N'_1(u, v)$ ו- $N'_2(u, v)$ מאונכים ל- $N(u, v)$, ולכן הם צירוף לניארי של אברי הבסיס האחרים. ישנם מקדמים $L_i^j(u, v)$ המקיימים:

$$N'_i(u, v) = L_i^1(u, v)X'_1(u, v) + L_i^2(u, v)X'_2(u, v)$$

L_i^j נקראים מקדמי ווינגרטן. הם **לא** סימטריים ביחס להחלפת i ו- j .
אם נסמן

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix}$$

יתקיים $L = -SG$, או, לחלופין, $S = -LG^{-1}$. אז ניתן לחשב את S מ- L ולהיפך.

העקמומיות הראשיות k_1, k_2 הן הערכים העצמיים של S . עקמומיות גאוס K היא הדטרמיננטה שלה $K = k_1 k_2 = \det S$ והעקמומיות החציונית H היא חצי מהעקבה שלה

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{Tr } S}{2}$$

יש מספר נוסחאות לחישוב K . הן כוללות:

$$K = \det S = L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2$$

$$K = \frac{\det L}{\det g}$$

$$K = -\frac{2}{g_{11}} L_{1\{1} L_{2\}}^2 = \frac{L_{12} L_1^2 - L_{11} L_2^2}{g_{11}}$$

$$K = \frac{2}{g_{11}} (\Gamma_{1[1:2]}^2 + \Gamma_{1\{1} \Gamma_{2\}}^2) = \frac{\Gamma_{11:2}^2 - \Gamma_{12:1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2}{g_{11}}$$

עבור מסילה $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ב- U , האורך של המסילה

עבור $t_1 < t < t_2$, הוא $\beta(t) = X \circ \alpha(t) = X(u(t), v(t))$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(u(t) \quad v(t)) \begin{pmatrix} g_{11}(u(t), v(t)) & g_{12}(u(t), v(t)) \\ g_{12}(u(t), v(t)) & g_{22}(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt}$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\frac{d^2 u}{(dt)^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 v}{(dt)^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

הפתרונות שלהם הם קווים גאודזים – "ישרים" של המשטח.

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\det \begin{pmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{12}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{pmatrix}} dudv \text{ הוא } \Omega \subseteq U \text{ של תחום של התמונה של } U$$

ב. משטח אבסטרקטי:

זו רק קבוצה U עם תבנית יסודית ראשונה $g_{ij}(u, v)$. כל מה שמוגדר רק לפי התבנית

הזאת, למשל

$$\Gamma_{ij}^k(u, v) = \frac{1}{2} (g_{im:j} + g_{jm:i} - g_{ij:m}) g^{mk}$$

-1

$$K = \frac{2}{g_{11}} (\Gamma_{1[1:2]}^2 + \Gamma_{1\{1} \Gamma_{2\}}^2) = \frac{\Gamma_{11:2}^2 - \Gamma_{12:1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2}{g_{11}}$$

עדיין מוגדרים ככה.

משוואות וקווים גאודזיים, אורך מסילות, ושטח, מוגדרים אותו דבר.

ג. פרמטריזציה איזוטרמית:
זו פרמטריזציה עברה

$$G = f^2(u, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לאיזשהי פונקציה f , ז"א ש- $f^2(u, v) = g_{22}(u, v) = g_{11}(u, v) = 0$ ו- $g_{12}(u, v) = 0$

במקרה הזה נגדיר $\mu(u, v) = \ln f(u, v)$ ואז יש נוסחאות קצרות לסימני קריסטופל.
 $\Gamma_{11}^2 = -\mu'_2, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \mu'_2, \Gamma_{22}^1 = -\mu'_1, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \mu'_1$

בנוסף ישנו משהו שנקרא "אופרטור לפלס בלטרמי". זהו האופרטור

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial v)^2} \right)$$

ז"א שעבור כל פונקציה $h(u, v)$ מתקיים

$$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 h}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2 h}{(\partial v)^2} \right)$$

ישנו משפט שמוצא את עקמומיות גאוס בקלות.

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2} \Delta_{LB}(\mu) = -\frac{1}{2} \Delta_{LB}(\ln f) = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 \ln f}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2 \ln f}{(\partial v)^2} \right) \\ &= \frac{1}{f} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f'_u}{f} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f'_v}{f} \right) \right) = \frac{f''_{uu} \cdot f + (f'_u)^2 + f''_{vv} \cdot f + (f'_v)^2}{f^3} \end{aligned}$$

זוהו הכול.

נוסחאות של משטחי סיבוב:

א. בכלליות

משטח הסיבוב של $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$ עם $t_1 < t < t_2$ ואם $f(t) > 0$ הוא
 $0 < \theta < 2\pi, t_1 < \phi < t_2. X(\phi, \theta) = (f(\phi) \cos \theta, f(\phi) \sin \theta, g(\phi))$
המאפיינים שלו הם:

$$\begin{aligned} X'_1 &= (f'(\phi) \cos \theta, f'(\phi) \sin \theta, g'(\phi)) \\ X'_2 &= (-f(\phi) \sin \theta, f(\phi) \cos \theta, 0) \\ X''_{11} &= (f''(\phi) \cos \theta, f''(\phi) \sin \theta, g''(\phi)) \\ X''_{12} &= (-f'(\phi) \sin \theta, f'(\phi) \cos \theta, 0) \\ X''_{22} &= (-f(\phi) \cos \theta, -f(\phi) \sin \theta, 0) \\ X'_1 \times X'_2 &= (-f(\phi)g'(\phi) \cos \theta, -f(\phi)g'(\phi) \sin \theta, f(\phi)f'(\phi)) \end{aligned}$$

$$\|X'_1 \times X'_2\| = |f(\phi)| \sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}} (-g'(\phi) \cos \theta, -g'(\phi) \sin \theta, f'(\phi))$$

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} f'^2(\phi) + g'^2(\phi) & 0 \\ 0 & f^2(\phi) \end{pmatrix} \\ L &= \frac{1}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}} \begin{pmatrix} f'(\phi)g''(\phi) - g'(\phi)f''(\phi) & 0 \\ 0 & f(\phi)g'(\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S = -LG^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}} \begin{pmatrix} \frac{f'(\phi)g''(\phi) - g'(\phi)f''(\phi)}{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)} & 0 \\ 0 & \frac{g'(\phi)}{f(\phi)} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{g'(\phi)f''(\phi) - f'(\phi)g''(\phi)}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}^3}$$

$$k_2 = \frac{-g'(\phi)}{f(\phi)\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}}$$

$$K = k_1 k_2 = \det S = \frac{f'(\phi)g'(\phi)g''(\phi) - g'^2(\phi)f''(\phi)}{f(\phi)(f'^2(\phi) + g'^2(\phi))^2}$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{tr } S}{2}$$

$$= \frac{f(\phi)g'(\phi)f''(\phi) - f(\phi)f'(\phi)g''(\phi) - f'^2(\phi)g'(\phi) - g'^3(\phi)}{2f(\phi)\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}^3}$$

$$G'_1 = \begin{pmatrix} 2f'(\phi)f''(\phi) + 2g'(\phi)g''(\phi) & 0 \\ 0 & 2f(\phi)f'(\phi) \end{pmatrix}, \quad G'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'(\phi)f''(\phi) + g'(\phi)g''(\phi)}{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{f'(\phi)}{f(\phi)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{f(\phi)f'(\phi)}{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

אם המסילה γ סגורה - $(f(t_1), 0, g(t_1)) = (f(t_2), 0, g(t_2))$ אז:

אורך ϕ - לולאה הוא אורך הלולאה γ - $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt$

אורך θ - לולאה הוא אורך המסלול הכי קצר (על המשטח) שמקיף את ציר הסיבוב - $2\pi \min_t f(t)$

הפרמטר הקונפורמי הוא

$$i \max \left\{ 2\pi \div \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{f(t)} dt, \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{f(t)} dt \right\}$$

הסיבה היא שאנחנו מחפשים "פרמטריזציה קונפורמית" למשטח. פרמטריזציה שעבורה G היא מטריצה סקאלרית $G = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. שימו לב ש- C היא פונקציה, לא קבוע.

קיימת פרמטריזציה אחרת למסילה

$$h(x_i) = t_i, \quad x_1 < x < x_2, \quad \tilde{\gamma}(x) = \gamma(h(x)) = (f(h(x)), 0, g(h(x)))$$

שמקיימת

$$h'(x) = \frac{f(h(x))}{\sqrt{f'^2(h(x)) + g'^2(h(x))}}$$

והיא נותנת פרמ' אחר למשטח

$$, x_1 < \varphi < x_2 , \tilde{X}(\varphi, \theta) = (f(h(\varphi)) \cos \theta , f(h(\varphi)) \sin \theta , g(h(\varphi)))$$

$$.0 < \theta < 2\pi$$

והתבנית היסודית שלה היא

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} (f(h(\varphi)))'^2 + (g(h(\varphi)))'^2 & 0 \\ 0 & f^2(h(\varphi)) \end{pmatrix} = G \\ &= \begin{pmatrix} h'^2(\varphi) (f'^2(h(\varphi)) + g'^2(h(\varphi))) & 0 \\ 0 & f^2(h(\varphi)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f^2(h(\varphi)) & 0 \\ 0 & f^2(h(\varphi)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

זוהי היה בסדר.

כעת, המשטח שקול קונפורמית למשטח סגור שטוח (עם תבנית יסודית $(G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$

אבל עם "מרחב קואורדינטות" $0 < \theta < 2\pi, x_1 < \varphi < x_2$. זה טורוס שטוח מלבני שהמקדם הקונפורמי שלו הוא

$$i \max \left\{ \frac{2\pi}{x_2 - x_1}, \frac{(x_2 - x_1)}{2\pi} \right\}$$

לבסוף, נשים לב ש-

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} 1 dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{f(t)} dt$$

כי

$$dt = h'(x) dx = \frac{f(h(x))}{\sqrt{f'^2(h(x)) + g'^2(h(x))}} dx = \frac{f(t)}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}} dx$$

ולכן

$$dx = \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{f(t)} dt$$

נשים לב משאין שום צורך למצוא את $h(x)$, צריך רק את $x_2 - x_1$ ויש לנו נוסחא לזה.

ב. אם משטח הסיבוב של $1 = \|\gamma'(t)\| = f'^2(t) + g'^2(t)$ אז:

המאפיינים שלו הם:

$$\|X'_1 \times X'_2\| = |f(\phi)|$$

$$N = (-g'(\phi) \cos \theta, -g'(\phi) \sin \theta, f'(\phi))$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(\phi) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} f'(\phi)g''(\phi) - g'(\phi)f''(\phi) & 0 \\ 0 & f(\phi)g'(\phi) \end{pmatrix}$$

$$S = -LG^{-1} = \begin{pmatrix} g'(\phi)f''(\phi) - f'(\phi)g''(\phi) & 0 \\ 0 & -\frac{g'(\phi)}{f(\phi)} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = g'(\phi)f''(\phi) - f'(\phi)g''(\phi)$$

$$k_2 = -\frac{g'(\phi)}{f(\phi)}$$

$$K = k_1k_2 = \det S = \frac{g'^2(\phi)f''(\phi) - f'(\phi)g'(\phi)g''(\phi)}{f(\phi)}$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{tr} S}{2} = \frac{f(\phi)g'(\phi)f''(\phi) - f(\phi)f'(\phi)g''(\phi) - g'(\phi)}{2f(\phi)}$$

$$G'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2f(\phi)f'(\phi) \end{pmatrix}, \quad G'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{f'(\phi)}{f(\phi)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = f(\phi)f'(\phi)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

אם המסילה γ סגורה - $(f(t_1), 0, g(t_1)) = (f(t_2), 0, g(t_2))$
 אורך ϕ - לולאה הוא אורך הלולאה γ - $t_2 - t_1$
 אורך θ - לולאה הוא אורך המסלול הכי קצר (על המשטח) שמקיף את ציר הסיבוב -
 $2\pi \min_t f(t)$
 הפרמטר הקונפורמי הוא

$$i \max \left\{ 2\pi \div \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{f(t)} dt, \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{f(t)} dt \right\}$$

נוסחאות של גרפים:

גרף של פונקציה $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ עם $U \subseteq \mathbb{R}^2$, הוא המשטח עם הפרמטריזציה

$$(u, v) \in U, X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

המאפיינים שלו הם:

$$X'_1 = (1, 0, f'_u)$$

$$X'_2 = (0, 1, f'_v)$$

$$X''_{11} = (0, 0, f''_{uu})$$

$$X''_{12} = (0, 0, f''_{uv})$$

$$X''_{22} = (0, 0, f''_{vv})$$

$$X'_1 \times X'_2 = (-f'_u, -f'_v, 1)$$

$$\|X'_1 \times X'_2\| = \sqrt{f'^2_u + f'^2_v + 1}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{f'^2_u + f'^2_v + 1}} (-f'_u, -f'_v, 1)$$

$$G = \begin{pmatrix} f'^2_u + 1 & f'_u f'_v \\ f'_u f'_v & f'^2_v + 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{f_u'^2 + f_v'^2 + 1}} \begin{pmatrix} f_{uu}'' & f_{uv}'' \\ f_{uv}'' & f_{vv}'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{f_u'^2 + f_v'^2 + 1}} H_f$$

כאשר H_f היא מטריצת ההסיאן של f .

$$G^{-1} = \frac{1}{f_u'^2 + f_v'^2 + 1} \begin{pmatrix} f_v'^2 + 1 & -f_u'f_v' \\ -f_u'f_v' & f_u'^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$S = -LG^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{f_u'^2 + f_v'^2 + 1}^3} \begin{pmatrix} f_{uu}''(f_v'^2 + 1) - f_{uv}''f_u'f_v' & f_{uv}''(f_u'^2 + 1) - f_{uu}''f_u'f_v' \\ f_{uv}''(f_v'^2 + 1) - f_{vv}''f_u'f_v' & f_{vv}''(f_u'^2 + 1) - f_{uv}''f_u'f_v' \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{g'(\phi)f''(\phi) - f'(\phi)g''(\phi)}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}^3}$$

$$k_2 = \frac{-g'(\phi)}{f(\phi)\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}}$$

$$\begin{aligned} K = \det S &= \frac{1}{(f_u'^2 + f_v'^2 + 1)^3} \left(f_{uu}''f_{vv}''(f_u'^2 f_v'^2 + f_u'^2 + f_v'^2 + 1) + f_{uv}''^2 f_u'^2 f_v'^2 \right. \\ &\quad \left. - f_{uu}''f_{uv}''(f_u'f_v'^3 + f_u'f_v') - f_{vv}''f_{uv}''(f_u'^3 f_v' + f_u'f_v') \right) \\ &\quad - \left(f_{uu}''f_{vv}''f_u'^2 f_v'^2 + f_{uv}''^2(f_u'^2 f_v'^2 + f_u'^2 + f_v'^2 + 1) \right. \\ &\quad \left. - f_{uu}''f_{uv}''(f_u'f_v'^3 + f_u'f_v') - f_{vv}''f_{uv}''(f_u'^3 f_v' + f_u'f_v') \right) \\ &= \frac{1}{(f_u'^2 + f_v'^2 + 1)^3} \left(f_{uu}''f_{vv}''(f_u'^2 + f_v'^2 + 1) \right. \\ &\quad \left. - f_{uv}''^2(f_u'^2 + f_v'^2 + 1) \right) = \frac{f_{uu}''f_{vv}'' - f_{uv}''^2}{(f_u'^2 + f_v'^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\det H_f}{(f_u'^2 + f_v'^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

כאשר, שוב, H_f היא מטריצת ההסיאן של f .

$$H = \frac{\text{tr} S}{2} = \frac{f_{uu}''(f_v'^2 + 1) + f_{vv}''(f_u'^2 + 1) - 2f_{uv}''f_u'f_v'}{\sqrt{f_u'^2 + f_v'^2 + 1}^3}$$

סימני קריסטופל...