תרגיל 7

להגשה עד 1.1.17

שאלה 1

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $f\colon X\to\mathbb{R}$ פונקציה ב־$L^1(\mu)$. לכל $t\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(t):=\int_X f(x)\cos\left(e^t f(x)\right)d\mu(x)$$

הוכיחו כי F מוגדרת ורציפה ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 5

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות חסומות (כל אחת בנפרד) מ־X ל־$\mathbb{R}$, כך ש: $f_n\to f$ במידה שוה מעל X.

1. הוכיחו כי $\|f\|_U:=\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty$ (כלומר: f חסומה ב־ X), וכי $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_U<\infty$.
2. הוכיחו כי אם $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, וכל f_n מדידה־$\mathbb{A}$, ו־ $\mu(X)<\infty$ אז $\int_X f_n d\mu\to\int_X fd\mu$.
3. תנו דוגמא של ממ"ח $(X,\mathbb{A},\mu)$, כך ש: $\mu(X)=\infty$, וסדרת פונקציות מדידות־$\mathbb{A}$: $(f_n)_{\mathbb{N}}$ כך ש־ $f_n\to f$ במידה שוה, אבל $\int_X f_n d\mu\not\to\int_X fd\mu$.

שאלה 2

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $a\in(0,\infty)$, $f\colon X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה כך ש:

$$0<c:=\int_X fd\mu<\infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)d\mu=\begin{cases} c & a=1\\ \infty & 0<a<1\\ 0 & 1<a<\infty\end{cases}$$

תזכורת: אם $0\le t$ ו־ $1\le a$ אז $1+t^a\le(1+t)^a\le e^{at}$.

שאלה 3

יהי (X,S,μ) ממ"ח סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית היא אינטגרבילית אסם

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{x\ :\ f(x)\ge n\}\right)<\infty .$$

שאלה 4

יהי (X,S,μ) ממ"ח סופית ותהי $f\in L^1(\mu)$ אי שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\int_X f^\alpha d\mu=\int_X f d\mu \, .$$

שאלה 5

יהי $(\mathbb{R}^2,\mathbf{B}(\mathbb{R}^2))$ המרחב המדיד של המישור עם σ אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y):=\begin{cases} 1 & 0\le x \text{ and } x\le y<x+1 \\ -1 & 0\le x \text{ and } x+1\le y<x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)dm(y)dm(x)\neq\int\int f(x,y)dm(x)dm(y)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

שאלה 6

הוכיחו כי: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}=I:=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dm(x)$.

הדרכה: חשבו קודם את I^2 ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות.

בהצלחה!!