<u>תזכורת:</u>

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_1,\tau_1) \xrightarrow{f} (X_2,\tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism   *אזהרה: זה לא* Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) f חח"ע + על (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).

ב) f רציפה.

ג) f^{-1} רציפה.

<u>הגדרה:</u> נסמן - $(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2)$ אם קיים $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ $homeomorphism$ ונגיד מרחבים **הומאומורפיים**.

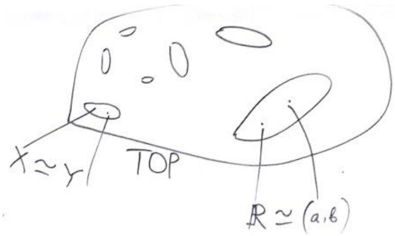
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X,\tau) \simeq (X,\tau)$.

2) $(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \Leftarrow (X_2,\tau_2) \simeq (X_1,\tau_1)$.

3) $\begin{cases}(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \\ (X_2,\tau_2) \simeq (X_3,\tau_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_3,\tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - id, בשביל (2) ב - f^{-1} ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).



<u>שאלה חשובה:</u> מתי 2 מרחבים טופולוגיים X, Y הם הומיאומורפיים או ומתי לא ?

$X \simeq Y$ או $X \not\simeq Y$

<u>שאלה יותר כללית:</u> מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X \xrightarrow{f} Y$

(ז"א מתי $Y =$ "תמונה רציפה" של X).

<u>הערה:</u> מה התכונות שנשמרות ע"י הומאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

שאלה: למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

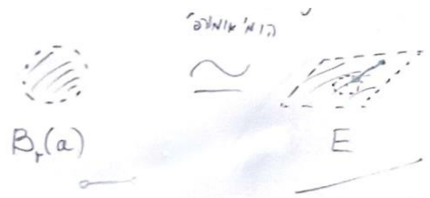
דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f: X \to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f: \mathrm{A} \to f(\mathrm{A})$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$: הזזות $T_v: E \to E$, $T_v(x) = v + x$ תמיד איזומטריות.
- כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם:

$M_c: E \to E \in Lip_{|c|}$, $M_c(x) = c \cdot x$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

<u>משפט:</u> כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.



הוכחה:

שלב א' – $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

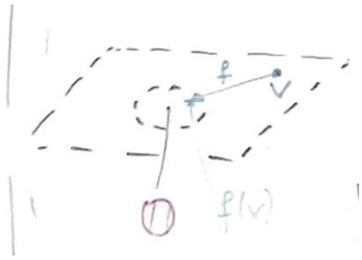
כי: $B_1(0) \underbrace{\simeq}_{M_r} B_r(0) \underbrace{\simeq}_{T_a} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' – מ"ל ש: $E \underset{f}{\simeq} B_1(0)$.

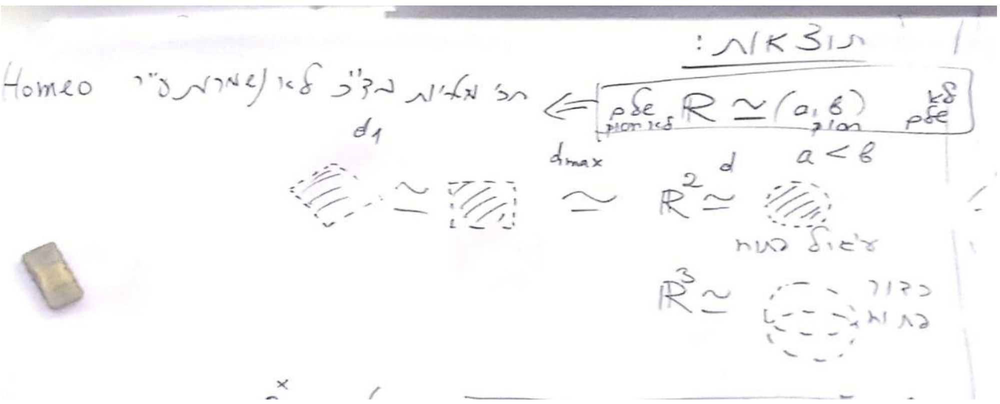
נגדיר $\boxed{f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v}$ $\quad f : E \to B(0_E, 1)$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x \quad f^{-1} : B(0_E, 1) \to E$



תוצאות: $\mathbb{R} \simeq (-1,1) \simeq (a,b)$

$\mathbb{R}^n \simeq B(\mathrm{v}, r) \quad \forall \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$



המשך דוגמאות:

- $[a,b] \simeq [c,d]$ כאשר $a < b$, $c < d$
(למצוא הומיאומורפיזם פונקציה' לינארית למקוטעין).
- $(a,\infty) \simeq (c,d) \simeq (-\infty, b)$

(חלק מההסבר: $\mathbb{R} \underset{\log_2}{\overset{2^x}{\simeq}} (0,\infty)$).

- $(0,1) \not\simeq [2,3]$

כי הקטע הסגור קומפקטי בעוד שהקטע הפתוח לא קומפקטי. אפילו לא קיימת פונקציה רציפה ועל מ - $[2,3]$ על- $(0,1)$ כי קומפקטיות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

- $[3,8] \not\simeq [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר (למרות ששניהם קשירים ולא קומפקטיים).

- $[0,1) \not\approx (2,5)$

ב - $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" ($(2,5)/\{c\} \notin Conn$). אבל ב - $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $[0,1)/\{0\} \in Conn$

<u>הגדרה</u>: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **<u>מחלקת</u>** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **תכונה טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם).

<u>טענה:</u> אם $X \xrightarrow{f} Y$ המיאומו' אז לכל נק' מחלקת $p \in X$ גם $f(p) \in Y$ נק' מחלקת.

$\underbrace{X/\{p\}}_{\substack{\text{פריק} \\ \text{ז"א לא קשיר}}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$ גם הומיאומורפיזם.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר *מרכיבי קשירות* .

- הוכיחו ש - $0 \not\approx 8$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- * למיין:

א) את כל "הספרות"

1234567890

ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

- כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

היא רציפה (ליפשיץ – $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

$$\Downarrow$$

- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה ($\det(A_f) \neq 0$). אזי f הומיאומורפיזם.

תרגיל: הוכיחו שכל ריבוע/עיגול הומיאומורפי עם אליפסה

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

תרגיל: הוכיחו שכל הכדורים ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ הם הומיאומורפיים.

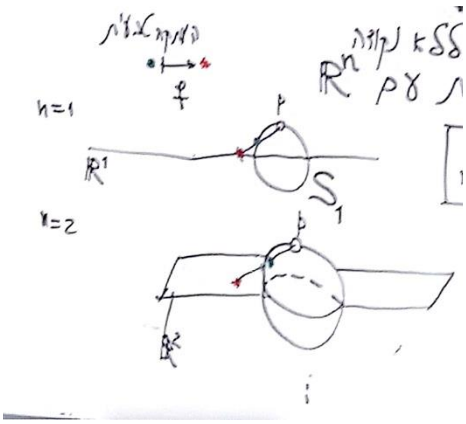
- היטל סטריאוגרפי

טענה: ספירה n – מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\} \simeq \mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1,2$ נגדיר f לפי:



הגדרות: (אוטומורפיזמים)

חבורת הומיואומורפיזמים של מ"ט

$X \in TOP$, $Homeo(X) := \left\{X \xrightarrow{f} X \text{ הומיאומורפיזמים}\right\}$ חבורה לגבי ההרכבה

חבורת איזומטריות של מ"מ

$X = (X,d) \in Metr$, $Iso(X) := \left\{(X,d) \to (X,d) \text{ איזומטריות}\right\}$

שימו לב: אם $\tau = top(d)$ אז $\mathrm{Iso}(X,d)$ תת חבורה של $\mathrm{Homeo}(X,\tau)$.

$$Iso(X) \le Homeo(X) \underset{\text{ת"ח}}{\le} \underbrace{(S_X, \circ)}_{\text{חבורה סימטרית}}$$

הגדרה: נגדיר פעולה טבעית $Homeo(X) \times X \to X \quad (f,x) \longmapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x] = \{f(x) \in X \mid f \in \mathrm{Homeo}(X)\}$ – אורביטה (מסלול) של x.

אומרים ש $X -$ הוא **מ"ט הומוגני** $(homogeneous)$ אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall\, x,y \in X\,, \exists f \in Homeo(X): f(x) = y$

<u>דוגמה</u>: כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני (מה הוא $Homeo(X, \tau_{discr})$?)

<u>דוגמה</u>: $X = (0,2)$ מ"ט הומוגני.

<u>דוגמה</u>: אם $X = [0,1) \cup \{3\}$. אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad [\tfrac{1}{2}] = (0,1)$$

<u>הגדרה</u>: באופן דומה מגדירים מ"מ (X,d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X) \times X \to X$ יש מסלול אחד).

<u>דוגמה</u>: $\mathbb{R}^n$, מרחב נורמי, S_n, $(\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X = (-1,1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

<u>תרגיל</u>: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X = (3, \infty)$

ב) $X = [0,1]$

ג) $X = 8$

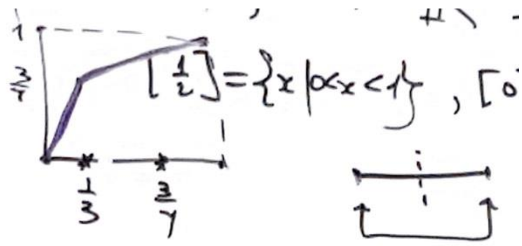
ד) $X = (0,1) \cup (2,4) \cup \{7\}$

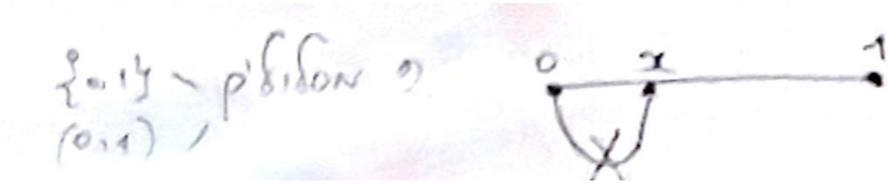
תשובה:

א) מסלול 1 (הומוגניות!). $(3,\infty) \simeq \mathbb{R}$ ו - $\mathbb{R}$ הומוגני (הזזות).

ב) 2 מסלולים. $[0] = \{0,1\} = [1]$ $\left[\frac{1}{2}\right] = \{x | 0 < x < 1\}$

הערות:





לא קיים $h \in Homeo([0,1])$ כך ש $0 < x < 1$, $h(0) = x$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

קשירות (המשך)

משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש - $X \in Conn$. מאחר ו $f -$ על אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז Y פריק טופולוגית: $Y = \underbrace{Y_1}_{\neq\emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq\emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

אזי – $X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2)$

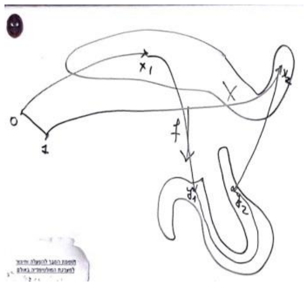
כאשר נשים לב ש - $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ כי f היא פונקציה על וגם הן **פתוחות** כי f רציפה. קיבלנו ש $X -$ פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

הגדרה: מ"ט X **קשיר מסילתית** אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y . **מסילה** מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$. סימון: $X \in PConn$.

משפט: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש - $X \in PConn$. f על ורציפה אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1$, $x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $\ [0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$.

נגדיר מסילה – $[0,1] \xrightarrow{f\circ\varphi} Y \qquad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל - y_2.

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1] \to [0,1]^2$ (Peano curve).

משפט: $PConn \subset Conn$.

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $\quad X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$X \in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ - x_1 ל - x_2, לכן –

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \qquad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$$

כעת – $[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2)$

$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

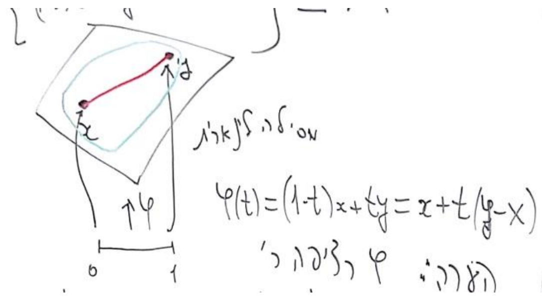
לא ריקות $\quad (0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1] \in Conn$.

☺

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in$ X מתקיים – $\{(1-t)x+ty: 0\le t\le 1\}\subseteq X$ (מסילה לינארית)

נסמן – $X\in Conv$.



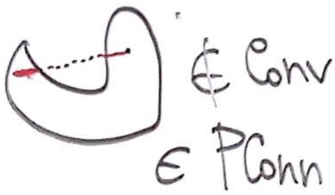
הערה:

φ רציפה כי – $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

טענה: $Conv\subset PConn$.

$$\boxed{Conv\subsetneq PConn\subsetneq Conn}$$

דוגמה:



הגדרה: $\varnothing\neq X\subseteq\mathbb{R}$ **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

<u>**טענה:**</u> נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

הסבר: $(1)\Leftarrow(2)$: לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$. מצד שני $[a,b]=\{a+(b-a)t\mid 0\le t\le 1\}$.

$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv\subseteq PConn\subseteq Conn$.

$(4)\Rightarrow(1)$

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,b \in X$ כך ש $[a,b] \not\subset X$. ז"א קיימים $a < c < b$ כך ש $a,b \in X$ אבל $c \notin X$.

נגדיר – $X_1 := (-\infty,c) \cap X, X_2 := (c,\infty) \cap X$

ואז נקבל ש – $X = \underbrace{X_1}_{a\in} \sqcup \underbrace{X_2}_{c\in}$

ואז קיבלנו ש - $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>משפט</u> (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ יש תכונת ערך ביניים.

הוכחה:

$(1) \Leftarrow (2)$:

תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן – $X = \underbrace{X_1}_{a\in} \sqcup \underbrace{X_2}_{c\in}$

$\mathbb{R} \supset f(X) \ni Conn$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \in \{קטעים\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(2) \Leftarrow (1)$:

נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל – 0 ואת X_2 שולחת ל – 1.

X_1, X_2 פתוחות ב – X ⇐ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש – $f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

☺

דוגמאות של קבוצות קמורות:

1) כל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$.

2) כדורים $B_r(a), B_r[a] \subset E$ בתוך מ"נ.

3) מלבנים, תיבות, אליפסוידים, ...

<u>משפט</u> (האלומות – תנאי מספיק לקשירות): נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j\in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.

הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j\in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש – X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים – $\forall j \in J: Y_j = \left(Y_j \cap X_1\right) \sqcup \left(Y_j \cap X_2\right)$

כעת נשים לב ש - $Y_j \cap X_1$ ו - $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו $z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש - $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת – $X_2 = \bigcup_{j\in J}\left(X_2 \cap Y_j\right) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

תוצאות:

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

(פשוט המשפט כאשר יש 2 אינדקסים).

2) **שרשור** –

נניח $X = \bigcup_{k\in \mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k-1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מייד מהמשפט!

2) נובע מ - (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k := Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב – $\quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור כי – $\quad A_1 \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש – $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

<u>הערה</u> (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא –

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל – y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת –

$Conn \ni A_{x,y} \subset X$

כך ש – $\quad \{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$, $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, $A_{y,x} := A_{x,y}$.

3) צ"ל – $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Rightarrow x \equiv z$

$$A_{x,z} := A_{x,y} \cup A_{y,z}$$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

<u>הגדרה</u>: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $\{y \in X | x \equiv y\} =: [x]$ "מחלקה של x".

נשים לב כי – $\quad X = \bigcup_{x\in X}[x]$.

תכונות:

1) $X = \bigcup_{x\in X}[x]$ (יש חזרות! $[x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y$).

2) מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.

3) X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

רמז: משפט האלומות.

$[x]\in Conn$ (4

$[x]=\bigcup\{A\subseteq X|x\in A\,,A\in Conn\}$ (5

ז"א $[x]=$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

6) $[x]$ סגור ב $-X$.

רמז: תוכיחו קודם את התרגיל הבא (ואז תשתמשו בתכונה (5)):

__**תרגיל:**__ נניח $X=\bar{Y}$ (ז"א Y צפופה ב $-X$). אם $Y\in Conn$ אז גם $X\in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X=(0,2)\cup(2,5)\cup\{7\}$

תשובה: $[1]=(0,2),[3]=(2,5),[7]=\{7\}$

ב. $X=\{1,2,3,4\}\times\mathbb{R}$

תשובה: $\{1\}\times\mathbb{R},\{2\}\times\mathbb{R},\{3\}\times\mathbb{R},\{4\}\times\mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** $(totally\ disconnected)$ אם $[x]=\{x\}$ לכל $x\in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

4) * $(\mathbb{Z},d_p)$

(רמז: לכל $a\in(\mathbb{Z},d_p)$ ו $b\neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U\in N(a)$ כך ש $b\notin U$)

5) * $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s:=\{O\subseteq\mathbb{R}:x\in O\Rightarrow\exists\varepsilon>0[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$$

__**הערה:**__ (**מרכיב קשירות מסילתיים**): לכל מ"ט X נגדיר –

$$x \equiv_P y \overset{def}{=} \text{קיימת מסילה מ} - x \text{ ל} - y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) צ"ל – $x \equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) צ"ל – $x \equiv_P y \Leftarrow y \equiv_P x$. עבור מסילה – $f: [0,1] \to X$

נגדיר מסילה הפוכה – $f^*(t) = f(1-t) \quad f^*: [0,1] \to X$

3) צ"ל – $x \equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases}$

עבור – $\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$

נגדיר $f_3: [0,1] \to X$ כך ש – $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

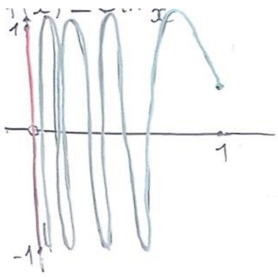
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש - f_3 רציפה מהתרגיל הבא:

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $Z \xrightarrow{f} X$ כך ש הצמצומים $f\big|_{Y_1}: Y_1 \to Z$, $f\big|_{Y_2}: Y_2 \to Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



<u>**הערה:**</u> $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $[-1,1] \xrightarrow{f} (0,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

נגדיר – $X \coloneqq (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$

$$(0,1] \simeq Gr(f) \coloneqq \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \le 1 \right\}$$

כעת, $Gr(f) \simeq (0,1]$ קשיר ו - $Gr(f)$ צפוף ב – X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

<u>תרגיל:</u> (לעתיד) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

$$.X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופלוגי}} \subset X \times Y$$

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

<u>הגדרה</u>: X נקרא קשיר מקומית בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ של a קיימת סביבה $V \in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. * תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

קישורים מומלצים:

https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism

https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space