תרגיל בית 1 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

משתנים מקריים

תרגיל 1 (תזכורת מתורת המידה). יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד, ויהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים על Ω (כלומר פונקציות מדידות $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$). ודאו שאתם זוכרים מדוע הפונקציות הבאות גם מהוות משתנה מקרי: $X_1 + X_2$, $5 \cdot X_1$, $X_1 \cdot X_2$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$.

בורל-קנטלי

תרגיל 2. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ עם התפלגות

$$P\left(X_n = -n^3 + n\right) = 1 - \frac{1}{n^3}, \qquad P\left(X_n = n^3\right) = \frac{1}{n^3}.$$

מהו $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right]$? מהו $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^3}$?

תרגיל 3. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות, ותהי $\{X_n : \Omega \to \mathbb{C}\}$ סדרת משתנים מקריים. הוכיחו שקיימת סדרת מספרים ממשיים חיוביים $\{c_n\}$ כך ש-$\lim_{n\to\infty} c_n X_n(\omega) = 0$ לכמעט כל $\omega \in \Omega$ (כלומר, הסיכוי שהגבול קיים ושווה ל-0 הוא 1).

(הדרכה: הראו שלכל n קיים k_n שעבורו $P\left(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > k_n\}\right) < \frac{1}{2^n}$, והיעזרו בלמת בורל-קנטלי על המאורעות האלו.)

תרגיל 4. נטיל מטבע מוטה עם הסתברות p ליפול על "פלי" והסתברות $1-p$ ליפול על "עץ" אינסוף פעמים (נניח $0 < p < 1$). התשובות לסעיפים הבאים עשויות להיות תלויות ב-p.

א. נתון $n \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שהרצף n פעמים "פלי" ייצא פעם אחת לפחות?

ב. נתון $n \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שהרצף n פעמים "פלי" ייצא אינסוף פעמים?

חוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב

תרגיל 5. תהי Ω קבוצה, ויהיו $X_1, X_2, \cdots : \Omega \to \mathbb{R}$ פונקציות. הוכיחו כי קיימת σ-אלגברה מינימלית על Ω, שנסמנה $\sigma\left(\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, שביחס אליה כל X_n מדיד.

(שימו לב שאם $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד וכל X_n הוא $\mathcal{F}$-מדיד, אז $\sigma\left(\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathcal{F}$).

תרגיל 6. תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים ממשיים, ויהיו s_n מ"מ ב"ת המתפלגים אחיד על הקבוצה $\{1, -1\}$. הסבירו מדוע המאורע $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n < \infty\right\}$ הוא מאורע זנב ביחס ל-$s_1, s_2, \ldots$. הסבירו את המשמעות.