

## אקסיומות ZFC לתורת הקבוצות

ZFC = **Z**ermelo-**F**raenkel & Axiom of **C**hoice

ישנם שני פרדיקטים יסודיים, שוויון (=) ושייכות ( $\in$ ), ושבע אקסיומות. לכל אקסיומה מובאים להלן ניסוח לא פורמלי בעברית וגם נוסחה לוגית מפורשת.

1. אקסיומת ההיקפיות: (Axiom of Extensionality)

שתי קבוצות הן שוות אם ורק אם יש להן אותם איברים.

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y]$$

2. אקסיומת האיחוד: (Axiom of Union)

לכל קבוצה קיים האיחוד של איבריה.

$$\forall F \exists A \forall y \forall x [(x \in y \wedge y \in F) \rightarrow x \in A]$$

3. אקסיומת קבוצת החזקה: (Axiom of Power Set)

לכל קבוצה קיימת קבוצת החזקה שלה.

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

כאשר מגדירים

$$(z \subseteq x) \leftrightarrow \forall q (q \in z \rightarrow q \in x)$$

4. מערכת אקסיומות ההחלפה: (Axiom Schema of Replacement)

לכל קבוצה  $A$  ונוסחה (פרדיקט)  $P(x, y)$  המגדירה פונקציה על  $A$ , קיימת קבוצה שאיבריה הם בדיוק התמונות של אברי  $A$  על ידי הפונקציה.

פורמלית: אם  $P$  היא נוסחה עם משתנים חופשיים מתוך  $x, y, A, w_1, \dots, w_n$  (אך לא  $B$ ),

$$\forall A \forall w_1 \dots \forall w_n [\forall x (x \in A \rightarrow \exists! y P) \rightarrow \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge P))]$$

5. אקסיומת האינסוף: (Axiom of Infinity)

קיימת קבוצה אינסופית.

פורמלית: קיימת קבוצה המכילה כאיבר את הקבוצה הריקה, ולכל איבר  $y$  מכילה גם את  $y \cup \{y\}$  כאיבר.

$$\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x)]$$

6. אקסיומת היסוד/הרגולריות: (Axiom of Foundation/Regularity)

כל קבוצה לא ריקה מכילה איבר שזר לה (כקבוצה).

$$\forall x [\exists a (a \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))]$$

7. אקסיומת הבחירה: (Axiom of Choice)

לכל קבוצה  $x$  שכל איבריה קבוצות לא ריקות, קיימת פונקציה המתאימה לכל  $y \in x$  איבר של  $y$ .

$$\forall x [\forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in y)) \rightarrow \exists f (\text{Fun}(f, x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in y \wedge \{\{y\}, \{y, z\}\} \in f)))]$$

כאשר  $\text{Fun}(f, x)$  הוא פרדיקט האומר ש- $f$  היא פונקציה עם תחום הגדרה  $x$ .

במקור (Z = Zermelo) היו שלוש אקסיומות נוספות; ב-ZFC הן נובעות מאקסיומות 1-5 לעיל.

8. אקסיומת הקבוצה הריקה: (Axiom of Empty Set)  
קיימת קבוצה ללא איברים.

$$\exists x \forall y \neg (y \in x)$$

9. אקסיומת הזוג: (Axiom of Pairing)  
לכל שתי קבוצות קיימת קבוצה המכילה את שתיהן כאיברים.

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

10. מערכת אקסיומות הפירוטלה הפרדה/הכלה:

(Axiom Schema of Specification/Separation/Comprehension)

לכל קבוצה A ונוסחה (פרדיקט) P(x) קיימת תת-קבוצה {x ∈ A | P(x)}.

פורמלית: אם P היא נוסחה עם משתנים חופשיים מתוך x, A, w<sub>1</sub>, ..., w<sub>n</sub> (אך לא B),

$$\forall A \forall w_1 \dots \forall w_n \exists B \forall x [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P)]$$

הערה: את אקסיומות 2, 3, 9 ניתן לנסח כך שהקבוצות שקיומן נדרש מכילות בדיוק את האיברים הנדרשים (ולא יותר); אך למעשה ניתן להסיק זאת מהנוסח הנתון בעזרת שימוש במערכת האקסיומות 4 (או 10).

$$Z = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$ZFC = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

מקורות:

ויקיפדיה בעברית ([תורת הקבוצות האקסיומטית](#))

ויקיפדיה באנגלית ([Zermelo-Fraenkel set theory](#)),

בתוספת עיבוד.