פיתרון לתרגיל מספר 8 בסטטיסטיקה

תשובה 1:

א. $\mathbb{A}_\Omega$ סיגמא-אלגברה. קיימת $A \subseteq \Omega \neq \emptyset$ לכן האוסף אינו ריק. $A \subseteq \Omega$ תת-קבוצה אזי $A^C = A - \Omega$ תת-קבוצה . כמו כן אם $\{A_i\}_{i\in I}$ $A_i \subseteq \Omega$ אזי $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \Omega$.

ב. וגם (ג):

- האוסף $\mathbb{A}_E$ אינו קבוצה ריקה מכיוון ש־ $E \subseteq \mathbb{A}_E$.
- $\mathbb{A}_E$ היא σ־אלגברה. רואים את זה על ידי: אם $A \in \mathbb{A}_E$ אז הקבוצה A היא נמצאת בכל σ־אלגברה שבאוסף $\mathbb{A}_E$, אז גם $\overline{A}$ היא נמצאת בכל σ־אלגברה שבאוסף $\mathbb{A}_E$. לכן $\overline{A} \in \mathbb{A}_E$. ואם יש לנו אוסף של קבוצות $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}_E$ אזי האוסף $\{A_i\}_{i\in I}$ מוכל בכל אחת מ־ σ־אלגבראות שבאוסף $\mathbb{A}_E$, אז גם $\sum_{i\in I} A_i$ נמצא בכל אחת מ־ σ־אלגבראות שבאוסף $\mathbb{A}_E$. לכן $\sum_{i\in I} A_i \in \mathbb{A}_E$.
- $\mathbb{A}_E$ היא σ־אלגברה מינימאלית היחידה שמכילה את E. באמת אם $\mathbb{B}_E$ היא σ־אלגברה מינימאלית שמכילה את E איז $\mathbb{A}_E \subseteq \mathbb{B}_E$ ולפי מינימאליות נקבל שמתקיים $\mathbb{A}_E = \mathbb{B}_E$.

תשובה 2:

(i) הקבוצות $\emptyset$ ו־ Ω שייכות ל־ $\mathbb{A}$.

(ii) אם $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{A}$, אזי $\sum_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$ וגם $\prod_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$.

(iii) אם $A, B \in \mathbb{A}$, אזי $A - B \in \mathbb{A}$.

(iv) אם $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}$, אזי $\sum_{i\in I} A_i \in \mathbb{A}$ וגם $\prod_{i\in I} A_i \in \mathbb{A}$.

הוכחה: (i) מכיוון $\mathbb{A}$ לא ריקה אז קיימת קבוצה $A \in \mathbb{A}$. לכן שימוש בתכונות של σ־אלגברה ו־ (2.1) נקבל ש־ $A + \overline{A} = \Omega \in \mathbb{A}$ וגם $A \cdot \overline{A} = \emptyset \in \mathbb{A}$.

(ii) מתכונות של σ־אלגברה נותר להראות ש $\prod_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$. מכיוון שנתון $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{A}$ אז נקבל $\{\overline{A_i}\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{A}$, וגורר $\sum_{i=1}^n \overline{A_i} = \overline{\prod_{i=1}^n A_i}$ על פי חוקי דה־מורגן (2.2), לכן מתכונות של σ־אלדברה נקבל הדרוש.

(iii) מתכונות של σ־אלדברה נקבל גם $B, \overline{A} \in \mathbb{A}$ ואז

$$A - B = A\overline{B} = \overline{\overline{A} + B} \in \mathbb{A}.$$

(iv) כמו (ii). □

תשובה 3:

א. תמיד מתקיים $a \in X \to a \in X$ לכן היחס רפלקסיבי. ומאחר ש $a \in X \to b \in X \to c \in X$ גורר ש $a \in X \to c \in X$ היחס הוא גם טרנזיטיבי. נוכיח כי היחס הוא סימטרי. יהיו $a\sim b$ ותהי $X \in \mathbb{A}$ כך ש $b \in X$. נניח בשלילה ש $a \notin X$, אזי $a \in X^C$. מאחר ש $X^C \in \mathbb{A}$ ו- $a\sim b$ נובע ש $b \in X^C$ לכן $b \notin X$ בסתירה להנחה.

ב. נסמן ב- $[a]$ את מחלקת השקילות של איבר a . עבור $X \in \mathbb{A}$ מתקיים $[a] \cap X = [a]$ אם ורק אם $[a] \cap X \neq \emptyset$. אכן, אם קיים $x \in [a] \cap X$ אז עפ"י ההגדרה כל איבר ששקול לו נמצא ב- X לכן $[a] \subseteq X$ הכיוון ההפוך טריוויאלי . מכאן

$X = X \cap \Omega = X \cap \bigcup_{a\in\Omega}[a] = \bigcup_{a\in\Omega}[a] \cap X = \bigcup_{a\in X}[a]$.

ג. לפי (ב) כל $X \in \mathbb{A}$ ניתן להצגה כאיחוד מחלקות השקילות שאינן זרות לו. אם מספר המחלקות בכלל הוא סופי N אזי יש לכל היותר 2^{N} אפשרויות לקבוצות X באלגברה סיגמא . בסתירה להנחה. לכן נוכל לקחת מספר אינסופי בן מניה של מחלקות שקילות שונות $E_1, E_2, E_3, \dots$ ובכל אחת איבר $e_i \in E_i$. מאחר ש $E_i \cap E_j = \emptyset$ עבור $i \neq j$ e_i אינו שקול ל- e_j לכן , עפ"י הגדרת ~ נובע שקיימת קבוצה $X_{ij} \in \mathbb{A}$ כך ש $e_i \in X_{ij}$ אבל $e_j \notin X_{ij}$. ניקח $A_i = \bigcap_{i \neq j} X_{ij}$. ברור ש $A_i \in \mathbb{A}$ כחיתוך בן מניה של קבוצות בסיגמא אלגברה, ומקיימת את התכונה הנדרשת.

ד. מגדירים פונקציה $\wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{A}$ ע"י $N \longmapsto \bigcup_{n \in N} A_n$. פונקציה זו חח"ע שכן אם $N_0 \neq N_1$ אזי קיים טבעי n כך ש $n \in N_0$ אבל $n \notin N_1$ לכן לפי התכונה של משפחת הקבוצות שבנינו קיים איבר $e_n \in A_n$ ששייך לתמונה של N_0 אך אינו בתמונה של N_1.

ה. מאחר וההעתקה שלעיל היא חח"ע מתקיים ש $|\mathbb{A}| \geq |\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ לכן $\mathbb{A}$ אינה בת-מניה.

<u>תשובה 4:</u>

יהי $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ מרחב הסתברות. להלן הוכחה לקבוצה גדולה יותר של תכונות מאשר נתבקשתם:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. לכל $A \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. אם $A, B \in \mathbb{A}$ ו־ $B \subset A$ אזי $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
4. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.
5. אם $A, B \in \mathbb{A}$ ו־ $B \subset A$ אזי $P(B) \leq P(A)$ (מונוטוניות של ההסתברות).
6. לכל $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ מתקיים $P\left(\sum_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i)$.
7. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
8. (א) אם $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ כזאת ש־ $A_i \subset A_{i+1}$ אזי $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.
   (ב) אם $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ כזאת ש־ $A_{i+1} \subset A_i$ אזי $P\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

<u>הוכחות:</u>

1. $\Omega, \emptyset$ שתי קבוצות זרות לכן לפי אקסיומה (2) מתקיים

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0.$$

2. $A, \overline{A}$ שתי קבוצות זרות אזי

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. $B \subset A$ ו־ $A - B, B$ שתי קבוצות זרות, אזי

$$P(A) = P(B + (A - B)) = P(B) + P(A - B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B).$$

4. $A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + (A - B)$ אזי $P(A) = P(AB) + P(A - B)$, לכן $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

5. אם $B \subset A$ אזי מכיוון ש־ $P(E) \geq 0$ לכל E נקבל ש־ $P(A) = P(B) + P(A-B) \geq$ $.P(B)$

6. קל להראות ש־

$$\sum_{i\in I} A_i = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - (A_1 + A_2)) + \ldots = A_1 + \sum_{i\in I,\, i>1} \left(A_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_j \right).$$

היתרון בביטוי האחרון שקיבלנו הוא שכל המאורעות הן קבוצות זרות בזוגות זה לזה. ולכן לפי אקסיומה (2) ותכונה 5 נקבל

$$P\left(\sum_{i\in I} Ai\right) = P(A_1) + \sum_{i\in I,\, i>1} P\left(A_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_j\right) \leq \sum_{i\in I} P(A_i).$$

7. מעובדה ש־ $A + B = A + (B - A)$ ולפי אקסיומה 2 ותכונה 4 מקבלים

$$P(A+B) = P(B + (A-B)) = P(B) + P(A-B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B).$$

8. (א) עבור כל n (סופי) מתקיים $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_n)$. לכן, על פי תכונה (5) נקבל $P(A_n)$ סדרה מונוטונית לא יורדת וחסומה על ידי 1, אז היא מתכנסת ונקבל

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(ב) אנו יודעים ש־ $A_{i+1} \subset A_i$ לכל $i \in I$. אזי $\overline{A_i} \subset \overline{A_{i+1}}$ לכל $i \in I$. לכן,

$$\begin{aligned} P\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right)}\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(\overline{A_n})) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

<u>תשובה 5:</u>

הקבוצה הראשונה שהוא הגדיר אינה סיגמא אלגברה אם Y אינה בסיגמא אלגברה שכן אם Y אינה בסיגמא אלגברה אז $A^c \cap Y$ אינה באלגברה שכן אם היתה אז $A \cup (A^c \cap Y) = (A \cup A^c) \cap$ $(A \cup Y) = Y$ לכן גם Y היתה צריכה ליהיות באלגברה. אי לכך המשלימה של A ב-Y אינה נמצאת באוסף לכן זוהי אינה סיגמא אלגברה על Y. כמובן שאם $Y \in \mathbb{A}$ הטיעון האחרון לא יתקיים ותיהיה בידינו סיגמא אלגברה.

הקבוצה השניה היא סיגמא אלגברה:

נסמן $A_Y = \{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$

$Y \cap X = Y \in A_Y$ כי $X \in \mathbb{A}$. אם $B \in A_Y$ אזי $B = A \cap Y$ עבור $A \in \mathbb{A}$ אזי $Y - B = (X - A) \cap Y \in A_Y$. בלסוף אם $B_i \in A_Y$ עם $B_i = A_i \cap Y$ אזי $\cup_i B_i = \cup_i A_i \cap Y = (\cup_i A_i) \cap Y \in A_Y$.

נעבור לסעיף ב. הוכחנו לעיל ש $\mathbb{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathbb{A}\}$ היא אכן סיגמא אלגברה על B.

לכן נותר להוכיח ש $P_B\colon \mathbb{A}_B \to [0,1]$ מקיימת את אקסימות פונקצית ההסתברות.

א) $0 \le P_B(F) = \frac{P(AB)}{P(B)} \le 1$.

ב) $P_B(B) = \frac{P(B\cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

ג) אם $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}_B$ כמשפחה זרה של קבוצות אזי $(F_i = A_i \cdot B)$ עם $A_i \in \mathbb{A}$, ולכן

$$P_B(\sum F_i) = \frac{P(\sum A_i B)}{P(B)} = \frac{\sum P(A_i B)}{P(B)} = \sum P_B(F_i).$$