

תרגיל מספר 5 מבנים אלגבריים

להגשה עד 4.12.2014

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

$$H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G \quad (\text{א})$$

$$H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G \quad (\text{ב})$$

$$H = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n \times n} = G \quad (\text{ג})$$

$$H = \{g^n \mid g \in G\} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{ד})$$

$$H = \{g^n \mid g \in G\} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{ה})$$

2. תהא G עם n איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n - 1$ איברים.

3. תהא G חבורה $H_1, H_2 \leq G$ הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$

הבהרות לסימונים:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים

2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים

3. \mathbb{R} היא קבוצת המספרים הממשיים

4. $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ היא קבוצת המספרים המרוכבים. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור מספרים).

5. $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ היא הקבוצה של כל השאריות האפשריות בחלוקה ב n . בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור מודולו n).

6. $\mathbb{F}^{n \times n}$ היא קבוצת כל המטריצות הריבועיות $n \times n$ עם מקדמים בשדה \mathbb{F} . בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור חיבור מטריצות). להגדרת שדה אפשר להסתכל בוויקיפדיה.
7. עבור $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נהוג לסמן $|A|$ כדטרמיננטה של A . להגדרת דטרמיננטה אפשר להתסכל בוויקיפדיה.
8. S_3 היא חבורת התמורות מהקבוצה $\{1, 2, 3\}$ לעצמה.
9. עבור חבורה G . הפירוש של הסימון $H \leq G$ הוא ש H היא תת חבורה של G .
10. הסימון $H_1 \subseteq H_2$ פירוש שהקבוצה H_1 מוכלת בקבוצה H_2 . כלומר שאם איבר ששייך ל H_1 אז בהכרח הוא שייך ל H_2 .
11. הסימון \iff היא קשר לוגי של "אם ורק אם" כלומר שאם צד ימין מתקיים אז צד שמאל מתקיים. בנוסף, אם צד שמאל מתקיים אז צד ימין מתקיים.
12. $G \setminus H = \{x \in G \mid x \notin H\}$ פירושו ההפרש בין G ל H .
13. $H_1 \cup H_2 = \{x \mid x \in H_1 \vee x \in H_2\}$ פירושו האיחוד בין הקבוצה H_1 לקבוצה H_2 .
14. הסימון \vee הוא הקשר הלוגי "או"