נוסחאות שימושיות במכניקה אנליטית

ניר שורץ

פיזיקה למתמט' 2015

הערות, הארות ושאר ירקות אנא שלחו לכתובת הזאת: eyenir@gmail.com

0. הקדמות

- תנועה בקו ישר $x = x_0 + \dot{x}t + \frac{\ddot{x}}{2}t^2$.
- חוק ניוטון 2: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (מע' משוואות).
- תנועה מעגלית (ז"א במהירות זוויתית קבועה).
  - קואור' פולאריות $\vec{r}(t) = R\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\varphi)\\ \sin(\omega t+\varphi)\end{pmatrix}$. מגזירה אפשר לקבל תאוצה צנטריפיטלית לכיוון המרכז.
  - $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$.
  - מהירות זוויתית $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{z}$. כיוונו נקבע כרגיל לפי יד ימין.
  - בדומה $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}$ וכן $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\cdot\vec{r}$ $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{r})$.
- כוחות נפוצים (בעצם שדות וקטורים): קפיץ: $F = -k\Delta\ell$, כוח נורמל N, מתיחות בחוט T. חיכוך מקביל למישור המשיק וערכו לפעמים פרופ' למהירות. כבידה $F = -mg\hat{z}$.
- תנע : $\vec{p} = m\vec{v}$. עבור $m \equiv \text{const.}$ מתקיים $\dot{p} = m\ddot{\vec{r}}$.
- הכללה: $\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} + \dot{m}\dot{\vec{r}}$ או בגירסת המשוואה האינטגרלית: $\sum \vec{F} = \frac{dp}{dt}$ (מע' עם משוואה לכל ציר).
- מרכז המסה הוא ממוצע משוקלל של מיקומי המסות כלומר $r_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$.
- תנע זוויתי: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$. הוא מורה אינטואטיבית על "כמה התנע מכוון זוויתית ולא רדיאלית".
  - אם $r \perp p$, $\left|\vec{L}\right| = |r|\cdot|p|$.
  - אם $r \parallel p$, $\left|\vec{L}\right| = 0$.
- עבודה לאורך מסילה: $W = \int_{\gamma(t)} \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)\cdot d\vec{r}$.
- אנרגיה קינטית של גוף $E_k = \frac{1}{2}mv^2(t)$. נסיק שבאופן סקלרי $W = \Delta E_k$ או באופן וקטורי $\vec{W} = \Delta\vec{P}$.
- פוטנציאל הוא השינוי באנרגיה הפוטנציאלית כלומר $U(r) = -\int_c \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$. עבור כוח משמר יתקיים $W = \Delta E_k + \Delta U = \Delta E_k - U(r_1) + U(r_2) = 0$.
- התב"ש:
  - F כוח משמר.
  - $\int_{\gamma(t)} F(\vec{r})\,d\vec{r}$ תלוי רק בנק' התחלה וסיום.
  - $\oint_{\gamma(t)} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = 0$ לכל מסילה סגורה.
  - קיימת פונקציה סקלרית $U(r)$ כנ"ל לכל מסלול $\vec{r}(t)$.
  - $\text{curl}\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{F} = 0$ (היכן שנזכור $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$) לכל $\vec{r}$.
  - $U(\vec{r}) = -\nabla\cdot U(r)$.
- כוח יקרא **מרכזי** אם $F(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ היכן שf היא איזוטרופיה במובן שאיננה תלויה בזווית ביחס לראשית אלא רק במרחק ממנה. $\hat{r}$ משמעו שהכוח מכוון אל/הרחק מהראשית.כוח זה תמיד משמר אנרגיה.

1. לגרנזיאן:

- **קואורדינטות מוכללות** $\vec{q} = \vec{q}(\vec{r})$ כאשר $\dim\vec{q} = \dim\vec{r} - \mathscr{C}$ (היכן ש$\mathscr{C}$ הוא מס' האילוצים).
- **לגרנז'יאן** המערכת - $\mathcal{L} = T - V$ היכן שT אנרגיה קינטית וV האנרגיה הפוטנציאלית במערכת.
- **פונקציונל הפעולה** היא הפונקציונל בו האינטגרנד הוא $\mathcal{L}$, ז"א $S(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)dt$. ר"ל למצוא אקסטרמה לפונקציונל.
- **משוואות** $Euler - Lagrange$ הן מערכת המד"ח שנותנות את האקסטרמום הנתונות ע"י:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q_i}}\right) = 0$$

.

- פרטים נהדרים על פורמליזם Lagrange לעיל:
  - המערכת אינווריאנטית לשינוי מערכת קואורדינטות (בפרט מוכללות).
  - ניתן לגלם אילוצים בבחירת מע' הקואורד'
  - פשוט יותר לתאר עם (T,V) מאשר עם F_i.
- כוח מוכלל - $F_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$.
- תנע מוכלל - $p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$.
- חוקי שימור: אם $\mathcal{L}$ב"ת בq_i,p_i הוא התנע הצמוד לכוח המוכלל F_iואזי $F_i = 0$ והתנע הצמוד p_i נשמר.
  - שמור תנע קווי: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}$ נשמר.
  - שמור עבור כוח מרכזי $\mathcal{L}\left(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},t\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$. מסקנה:

$$p_\theta \equiv \text{const.} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}$$

ומכאן שגם תנע זוויתי $mr^2\dot{\theta} \equiv \text{const.}$ (בדיוק מהצבה).

- זהות Beltrami: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0\Rightarrow L-u'\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u'}=\text{const.}$

2. המילטוניאן

- **המשתנה הצמוד ל**q: $p=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}$.
- טרנספורם לג'נדר:
  - **טרנספורם לז'נדר** – $\mathscr{L}(f(x))=g(y)=x(y)y-f(x(y))$ היכן ש$y(x)=\frac{\partial f}{\partial x}, y(x)^{-1}=x(y)$.
  - $\frac{\partial g}{\partial y}=x$.
  - $\mathscr{L}\mathscr{L}\equiv Id$
- **המילטוניאן** משמעו לז'נדר את הלגרנזיאן של הפעולה [בעצם לקבל את האנרגיה במערכת אמ"מ $q_i=q_i(x_1,\dots x_n)$ אך לדוגמה לא $q_i\notin W^{k,p}\backslash L^p$]:
  - במימד 1: $\mathcal{H}=\mathscr{L}\mathcal{L}(q,\dot{q},t)=\dot{q}(p,q)p-\mathcal{L}(q,\dot{q}(p,q),t)$.
  - מימד 1 בקרטזיות: $\mathcal{L}=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x),p=m\dot{x}\Rightarrow\mathcal{H}=\dot{x}p-\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)$. מימד גבוה דומה.
  - במימד גבוה: $\mathcal{H}=(\vec{p},\vec{q},t)=\sum_i p_i\dot{q}_i(p,q)-\mathcal{L}(q,\dot{q}(p,q),t)$.
  - נסכם: $\frac{\partial g}{\partial y}=x, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}=\dot{q}_i$.
  - כוח מרכזי בקואור' פולאריות:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r),p_r=m\dot{r},p_\theta=mr^2\theta\\ \Rightarrow\dot{\mathcal{H}}&=p_r\dot{r}(p_r)+p_\theta\theta\dot{(p_\theta)}-\mathcal{L}\\ &=\dots\\ &=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+U(r)\end{aligned}$$

- סוגרי $Poisson$ עבור שני שדות וקטורים/דריווציות A,B בקואור' מוכללות $A(\vec{p},\vec{q},t)$:
  - $\{A,B\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial B_i}{\partial p_i}-\frac{\partial A_i}{\partial p_i}\frac{\partial B_i}{\partial q_i}\right)$.
  - אנטי־קומוט': $\{A,B\}=-\{B,A\}$ (וכנובע $\{A,B\}=\{B,A\}\iff\{A,B\}=0$ וכן $\{A,A\}=0$).
  - לינארית: $\{f,\alpha g+\beta h\}=\alpha\{f,g\}+\beta\{f,h\}$.
  - זהות יעקובי + $\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$.
  - $\{f,gh\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$.
- מסקנה: $\mathcal{H}$ גודל שמור כל עוד אין לו תלות מפורשת בזמן, ז"א $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q})$ שכן

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=\frac{\partial A}{\partial t}+\{A,\mathcal{H}\}$$

ואם A ב"ת בזמן אז $\dot{A}=\{A,\mathcal{H}\}$ואם הוא גם קומוט' עם $\mathcal{H}$, $\frac{dA}{dt}=\{A,\mathcal{H}\}=0$.

- מסקנה 2: $\dot{\mathcal{H}}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}=\frac{\partial H}{\partial t}$.

3. משפט נתר

- מתעסקים עם חבורות Lie (שנסמן כ$\mathcal{G}$)כמו SO_n,GL_n,SL_n וכד'. בעצם אלו חבורות שהן במובן מסוים (למעשה טופולוגית) הן גם יריעה, ז"א קיים איזה $d\in\mathbb{N}$ כך שכל סביבה פתוחה הומיאומורפית לסביבה פתוחה (כדור) ב$\mathbb{R}^d$. מניחים שמכפלת כל זוג איברים נותנת איבר שלישי שכל הפונקציות בהן הוא תלוי הן רציפות וגזירות בכל השמתנים שלהןץ נתעסק הרבה פעמים בהצגות מטריציוניות לאיברי חבורה זוץ
- Rפעולת סימטריה המקושרת לחבורת הLie $\mathcal{G}$ אם $R\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}$.
- היוצר האינפיטיסמלי המקושר ל$\mathcal{G}$ הוא $G=\left.\frac{dR}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ (המקדם הראשון בפיתוח הטיילור של R ההעתקה האינווריאנטית ב $\mathcal{G}$ במשתנה היפר־ממשי אינפיטיסמלי כלומר $\varepsilon\in^*\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$ כך ש $\forall l\in^*\mathbb{R}, l\gg\epsilon$). לדוג ב$\mathcal{G}=SO_2$, $G=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.
- המפה האקספוננטית: בהנתן שR_i המטריצה המתאימה בפיתוח של R,ניתן לכתוב $R_i(\alpha)=\left[R_i\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]^n\to\exp(\alpha G_i)$. זו המשמעות של אקספוננט של מטריצה.
- משפט נתר: תהי משפחת סימטריות $\begin{matrix}q_i'=q_i+\sum_r Q_{ir}\varepsilon_r\\ t'=t+\sum_r T_r\varepsilon_r\end{matrix}$ המוגדרת על הלגרנז'יאן $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$אזי

$$\mathrm{Tr}\mathcal{H}-\sum_i p_iQ_{ir}=Tr\left(\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-\mathcal{L}\right)-\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}Q_{ir}$$

- יישומים:
  1. אם $\mathcal{L}(\dots,t)\equiv\mathcal{L}(\dots,t+\varepsilon)$ אזי

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\mathcal{L}\right)\equiv s\mathcal{H}=\text{const.}$$

ז"א אם הלגרנז'יאן אינווריאנטי להזזה באינפיטיסמל, ההמילטוניאן נשמר . במע' קרטזית, משפט נתר גורר לפי סימטרית הזזה בזמן את שימור האנרגיה במערכת.

  2. אם $\mathcal{L}$אינווריאנטי תחת סיבוב במישור xy אז לפי הפיתוח בהרצאה לSO_2,

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}y-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}(-x)=xp_y-yp_x\equiv L_z=\text{const.}$$

ונובע מכאן שימור תנע זוויתי בציר $\hat{z}$.

4. מערכות ייחוס

בחלק זה תהא מערכת ייחוס S בקואורדינטות כלשהן ומערכת ייחוס שנייה S'עם קואורדינטות אחרות אשר בינהן רוצים למצוא העתקות ושדות (=כוחות).

- חבורת גלילי היא חבורה של העתקות אינווריאנטיות תחת חוקי ניוטון (בעצם זו החבורה של ההעתקות האורתוגונליות). בין ההעתקות:
  - הזזה (טרנסלציה) במרחב ־ כאשר $r_S-r_{S'}=r_0>0$.
  - הזזה בזמן ־ כאשר $t_S-t_{S'}=t_0>0$.
  - האצה (בוסט) כאשר מערכת S' נעה במהירות v_0 ביחס לS כלומר $\vec{r}_S=\vec{r}_{S'}+\vec{v_0}t$.
  - סיבוב (רוטציה) ע"י כפל במטריצת סיבוב

$$R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\ \sin\alpha&\cos\alpha&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

.

  - היפוך הזמן $t_S=-t_{S'}$.
  - היפוך המרחק $x_S=-x_{S'}$.
- הכוח הצנטריפוגלי: $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r_{\vec{S'}})$. במערכת S המקורית פועל הכוח כלפי מרכז המעגל. כוח זה מדומה.
- הכוח הקוריולי: $-2m\vec{\omega}\times r_{\dot{\vec{S'}}}$. כוח זה פועל במאונך לכיוון המהירות $\dot{\vec{r}}$. גם כן כוח מדומה. הוקטור $\vec{\omega}$הוא בכיוון $\hat{z}$.

- דוגמה לנימוק של שימור בשתי המערכות: כשמכניסים ידיים ורגלים לקרוסלה מדוע מהירות סיבוב גדלה?
  - במערכת S יש שימור תנ"ז.
  - במערכת S' ישנו כוח קוריולי.
- טרנספורמציית גלילי היא טרנספורמציה לינארית בין מערכות ייחוס המראה כיצד משתנים הזמן והמרחב כאשר עוברים ממערכת ייחוס אחת למערכת ייחוס האחרת הנעה יחסית אליה במהירות קבועה בקו ישר. טרנספורמציית גלילי נכונה בקירוב טוב כל עוד המהירויות קטנות באופן משמעותי ממהירות האור ומוגדרת ע"י $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} + v_0$.
- טרנספורמציות לורנץ הן טרנספורמציות לינאריות בין מערכות ייחוס המראות כיצד משתנים הזמן והמרחב כאשר עוברים ממערכת ייחוס אחת למערכת ייחוס אינרציאלית הנעה יחסית אליה במהירות קבועה בקו ישר.
- חבורת לורנץ:
  - הוגדרה בהרצאה כאוסף מטריצות הפיכות Λ כך ש $\Lambda^T v \Lambda = v$ היכן ש $v = \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}$ עבור קבוע c.
    מפורשות מדובר במטריצות ההפיכות מסדר 2 על 2 מהצורה הבאה:
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

היכן ש

$$\beta = \tanh u$$
$$\gamma = \cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (u \in \mathbb{R})$$

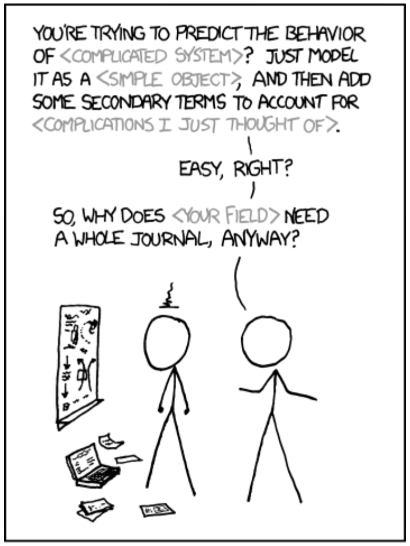
. ניתן לפשט לומר $\beta = \frac{v_0}{}$ היכן ש היא מהירות האור.

- בגבול $\beta \to 0$ מוביל לכך שטרנספורמצית לורנץ וגלילי מתלכדות (ז"א במהירות קטנה ממש ממהירות האור מספיק לעבוד עם טרנספורם גלילי).
- אורך לא נשמר בטרנספורם לורנץ.
- הידעת? ניתן להכליל גירסה זו של חבורת לורנץ לצורה $L = SO(3,1)$ כלומר החבורה האורתוגנלית המקושרת לתבנית הדיפרנציאלית (שלום אינפי4!) $Q(x,y,z,w) = x^2 - y^2 - z^2 - w^2$ המרחב $\mathbb{R}^4$ עם המטריקה המושרית מהתבנית הדיפר' הנ"ל הוא מרחב מינקובסקי שדיברנו עליו בדיפר' 1. אבל גם כאן בדומה למקרה הפרטי שהוצג בהרצאה מתקיים $\Lambda^T g \Lambda = g \quad \forall g \in \mathbb{F}^4$ בסימונים שלמעלה יתקיים:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן גם לקבל במרחב הנ"ל מטריצות חדשות ל$boost$ ולסיבוב אך לא נביא אותן כאן.

בהצלחה רבה! May the $\vec{F}$ be with U($\vec{r}$)!



LIBERAL-ARTS MAJORS MAY BE ANNOYING SOMETIMES, BUT THERE'S *NOTHING* MORE OBNOXIOUS THAN A PHYSICIST FIRST ENCOUNTERING A NEW SUBJECT.