נוסחאות שימושיות במכניקה אנליטית

ניר שורץ

פיזיקה למתמט' 2015

הערות, הארות ושאר ירקות אנא שלחו לכתובת הזאת: eyenir@gmail.com

0. הקדמות

- תנועה בקו ישר $x=x_0+\dot{x}t+\frac{\ddot{x}}{2}t^2$.
- חוק ניוטון 2: $\sum\vec{F}=m\vec{a}$ (מע' משוואות).
- תנועה מעגלית (ז"א במהירות זוויתית קבועה).
  - קואור' פולאריות $\vec{r}(t)=R\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\varphi)\\ \sin(\omega t+\varphi)\end{pmatrix}$. מגזירה אפשר לקבל תאוצה צנטריפיטלית לכיוון המרכז.
  - $\dot{\vec{v}}\perp\vec{v}$.
  - מהירות זוויתית $\vec{\omega}=\omega\cdot\hat{z}$. כיוונו נקבע כרגיל לפי יד ימין.
  - בדומה $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{\vec{v}}$ וכן $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\vec{\omega}\cdot\vec{r}$ $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\cdot\vec{r})$.
- כוחות נפוצים (בעצם שדות וקטורים): קפיץ: $F=-k\Delta\ell$, כוח נורמל N, מתיחות בחוט T. חיכוך מקביל למישור המשיק וערכו לפעמים פרופ' למהירות. כבידה $F=-mg\hat{z}$.
- תנע : $\vec{p}=m\vec{v}$. עבור $m\equiv\text{const.}$ מתקיים $\dot{p}=m\ddot{\vec{r}}$.
- הכללה: $\sum\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}+\dot{m}\dot{\vec{r}}$ או בגירסת המשוואה האינטגרלית: $\sum\vec{F}=\frac{dp}{dt}$ (מע' עם משוואה לכל ציר).
- מרכז המסה הוא ממוצע משוקלל של מיקומי המסות כלומר $r_{cm}=\frac{\sum m_i\vec{r_i}}{\sum m_i}$.
- תנע זוויתי: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$. הוא מורה אינטואטיבית על "כמה התנע מכוון זוויתית ולא רדיאלית".
  - אם $r\perp p$, $\left|\vec{L}\right|=|r|\cdot|p|$.
  - אם $r\parallel p$, $\left|\vec{L}\right|=0$.
- עבודה לאורך מסילה: $W=\int_{\gamma(t)}\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)\cdot d\vec{r}$.
- אנרגיה קינטית של גוף $E_k=\frac{1}{2}mv^2(t)$. נסיק שבאופן סקלרי $W=\Delta E_k$ או באופן וקטורי $\vec{W}=\Delta\vec{P}$.
- פוטנציאל הוא השינוי באנרגיה הפוטנציאלית כלומר $U(r)=-\int_{\cdot}\vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$. עבור כוח משמר יתקיים $W=\Delta E_k+\Delta U=\Delta E_k-U(r_1)+U(r_2)=0$.
- התב"ש:
  - F כוח משמר.
  - $\int_{\gamma(t)}F(\vec{r})\,d\vec{r}$ תלוי רק בנק' התחלה וסיום.
  - $\oint_{\gamma(t)}\vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}=0$ לכל מסילה סגורה.
  - קיימת פונקציה סקלרית $U(r)$ כנ"ל לכל מסלול $\vec{r}(t)$.
  - $\text{curl}\vec{F}(\vec{r})=\nabla\times\vec{F}=0$ (היכן שכזכור $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$) לכל $\vec{r}$.
  - $U(\vec{r})=-\nabla\cdot U(r)$.
- כוח יקרא **מרכזי** אם $F(\vec{r})=f(r)\hat{r}$ היכן ש f היא איזוטרופיה במובן שאיננה תלויה בזווית ביחס לראשית אלא רק במרחק ממנה. $\hat{r}$ משמעו שהכוח מכוון אל/הרחק מהראשית.כוח זה תמיד משמר אנרגיה.

1. לגרנזיאן:

- **קואורדינטות מוכללות** כאשר $\vec{q}=\vec{q}(\vec{r})$ $\dim\vec{q}=\dim\vec{r}-\mathscr{C}$ (היכן ש $\mathscr{C}$ הוא מס' האילוצים).
- **לגרנז'יאן** המערכת - $\mathcal{L}=T-V$ היכן שT אנרגיה קינטית וV האנרגיה הפוטנציאלית במערכת.
- **פונקציונל הפעולה** היא הפונקציונל בו האינטגרנד הוא $\mathcal{L}$, ז"א $S(\vec{r})=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)dt$. ר"ל למצוא אקסטרמה לפונקציונל.
- **משוואות** $Euler-Lagrange$ הן מערכת המד"ח שנותנות את האקסטרמום הנתונות ע"י:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q_i}}\right)=0$$

.

- פרטים נהדרים על פורמליזם Lagrange לעיל:
  - המערכת אינווריאנטית לשינוי מערכת קואורדינטות (בפרט מוכללות).
  - ניתן לגלם אילוצים בבחירת מע' הקואורד'
  - פשוט יותר לתאר עם (T,V) מאשר עם F_i.
- כוח מוכלל - $F_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$.
- תנע מוכלל - $p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q_i}}$.
- חוקי שימור: אם $\mathcal{L}$ב"ת בp_i,q_i הוא התנע הצמוד לכוח המוכלל F_iואזי $F_i=0$ והתנע הצמוד p_i נשמר.
  - שמור תנע קווי: $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$. $p=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}$ נשמר.
  - שמור עבור כוח מרכזי $\mathcal{L}\left(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},t\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r)$. מסקנה:

$$p_\theta\equiv\text{const.}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}$$

ומכאן שגם תנע זוויתי $mr^2\dot{\theta}\equiv\text{const.}$ (בדיוק מהצבה).

- זהות Beltrami: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0\Rightarrow L-u'\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u'}=\text{const.}$.

2. המילטוניאן

- **המשתנה הצמוד ל**q: $p=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}$.
- טרנספורם לג'נדר:
  - **טרנספורם לז'נדר** – $\mathscr{L}(f(x))=g(y)=x(y)y-f(x(y))$. היכן ש$y(x)=\frac{\partial f}{\partial x},y(x)^{-1}=x(y)$.
  - $\frac{\partial g}{\partial y}=x$.
  - $\mathscr{L}\mathscr{L}\equiv Id$
- **ההמילטוניאן** משמעו לז'נדר את הלגרנזיאן של הפעולה [בעצם לקבל את האנרגיה במערכת אמ"מ $q_i=q_i(x_1,\dots x_n)$ אך לדוגמה לא $q_i\notin W^{k,p}\backslash L^p$]:
  - במימד 1: $\mathcal{H}=\mathscr{L}\mathcal{L}(q,\dot q,t)=\dot q(p,q)p-\mathcal{L}(q,\dot q(p,q),t)$.
  - מימד 1 בקרטזיות: $\mathcal{L}=\frac{m\dot x^2}{2}-U(x),p=m\dot x\Rightarrow\mathcal{H}=\dot xp-\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot x^2+U(x)$. מימד גבוה דומה.
  - במימד גבוה: $\mathcal{H}=(\vec p,\vec q,t)=\sum_i p_i\dot q_i(p,q)-\mathcal{L}(q,\dot q(p,q),t)$.
  - נסכם: $\frac{\partial g}{\partial y}=x,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}=\dot q_i$.
  - כוח מרכזי בקואור' פולאריות:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2\right)-U(r),p_r=m\dot r,p_\theta=mr^2\theta\\ \Rightarrow\dot{\mathcal{H}}&=p_r\dot r(p_r)+p_\theta\theta\dot{(p_\theta)}-\mathcal{L}\\ &=\dots\\ &=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+U(r)\end{aligned}$$

- משוואות התנועה של המערכת נתונות ע"י $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}=\dot q_i$ היכן ש $\dot q_i=\frac{d}{dt}q_i,p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}$. לדוג' ע"ע בת.ב 5.
- סוגרי $Poisson$ עבור שני שדות וקטורים/דריווציות A,B בקואור' מוכללות $A(\vec p,\vec q,t)$:
  - $\{A,B\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\frac{\partial B_i}{\partial p_i}-\frac{\partial A_i}{\partial p_i}\frac{\partial B_i}{\partial q_i}\right)$.
  - אנטי־קומוט': $\{A,B\}=-\{B,A\}$ (וכנובע $\{A,B\}=\{B,A\}\iff\{A,B\}=0$ וכן $\{A,A\}=0$).
  - לינארית: $\{f,\alpha g+\beta h\}=\alpha\{f,g\}+\beta\{f,h\}$.
  - זהות יעקובי $\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$.
  - $\{f,gh\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$.
- מסקנה: $\mathcal{H}$ גודל שמור כל עוד אין לו תלות מפורשת בזמן, ז"א $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\vec p,\vec q)$ שכן

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial A}{\partial p_i}\dot p_i\right)=\frac{\partial A}{\partial t}+\{A,\mathcal{H}\}$$

ואם A ב"ת בזמן אז $\dot A=\{A,\mathcal{H}\}$ואם הוא גם קומוט' עם $\mathcal{H}$, $\frac{dA}{dt}=\{A,\mathcal{H}\}=0$.

- מסקנה 2: $\dot{\mathcal{H}}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}=\frac{\partial H}{\partial t}$.

3. משפט נתר

- מתעסקים עם חבורות Lie (שנסמן כ$\mathcal{G}$)כמו SO_n,GL_n,SL_n וכד'. בעצם אלו חבורות שהן במובן מסוים (למעשה טופולוגית) הן גם יריעה, ז"א קיים איזה $d\in\mathbb{N}$ כך שכל סביבה פתוחה ב$\mathcal{G}$ הומיאומורפית לסביבה פתוחה (כדור) ב$\mathbb{R}^d$. מניחים שמכפלת כל זוג איברים נותנת איבר שלישי שכל הפונקציות והקואור' בהן הוא תלוי הן רציפות וגזירות בכל המשתנים שלהן. נתעסק הרבה פעמים בהצגות מטריציוניות לאיברי חבורה זו.
- Rפעולת סימטריה המקושרת לחבורת הLie $\mathcal{G}$ אם $R\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}$.
- היוצר האינפיטיסמלי המקושר ל$\mathcal{G}$ הוא $G=\left.\frac{dR}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ (המקדם הראשון בפיתוח הטיילור של R ההעתקה האינווריאנטית ב $\mathcal{G}$ במשתנה היפר־ממשי אינפיטיסמלי כלומר $\varepsilon\in^*\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$ כך ש $l\gg\epsilon,\forall l\in^*\mathbb{R}$). דוגמה טריוויאלית וקלאסית ב$\mathcal{G}=SO_2$, $G=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.
- המפה האקספוננטית: בהנתן שR_i המטריצה המתאימה בפיתוח של R,ניתן לכתוב $R_i(\alpha)=\left[R_i\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]^n\to\exp(\alpha G_i)$. זו המשמעות של אקספוננט של מטריצה.
- משפט נתר: תהי משפחת סימטריות $q_i'=q_i+\sum_r Q_{ir}\varepsilon_r$, $t'=t+\sum_r T_r\varepsilon_r$ המוגדרת על הלגרנז'יאן $\mathcal{L}(q,\dot q,t)$אזי

$$\text{Tr}\mathcal{H}-\sum_i p_iQ_{ir}=Tr\left(\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\dot q_i-\mathcal{L}\right)-\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}Q_{ir}$$

- יישומים:
  1. אם $\mathcal{L}(\dots,t)\equiv\mathcal{L}(\dots,t+\varepsilon)$ אזי

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}-\mathcal{L}\right)\equiv s\mathcal{H}=\text{const.}$$

ז"א אם הלגרנז'יאן אינווריאנטי להזזה באינפיטיסמל, ההמילטוניאן נשמר . במע' קרטזית, משפט נתר גורר לפי סימטרית הזזה בזמן את שימור האנרגיה במערכת.

  2. אם $\mathcal{L}$אינוואריאנטי תחת סיבוב במישור xy אז לפי הפיתוח בהרצאה לSO_2,

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}y-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot y}(-x)=xp_y-yp_x\equiv L_z=\text{const.}$$

ונובע מכאן שימור תנע זוויתי בציר $\hat z$.

4. מערכות ייחוס

בחלק זה תהא מערכת ייחוס S בקואורדינטות כלשהן ומערכת ייחוס שנייה S'עם קואורדינטות אחרות אשר בינהן רוצים למצוא העתקות ושדות (=כוחות).

- חבורת גליליי היא חבורה של העתקות אינווריאנטיות תחת חוקי ניוטון (בעצם זו החבורה של ההעתקות האורתוגונליות). בין ההעתקות:
  - הזזה (טרנסלציה) במרחב ־ כאשר $r_S-r_{S'}=r_0>0$.
  - הזזה בזמן ־ כאשר $t_S-t_{S'}=t_0>0$.
  - האצה (בוסט) כאשר מערכת S' נעה במהירות v_0 ביחס לS כלומר $\vec r_S=\vec r_{S'}+\vec v_0t$.
  - סיבוב (רוטציה) ע"י כפל במטריצת סיבוב

$$R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\ \sin\alpha&\cos\alpha&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

.

  - היפוך הזמן $t_S=-t_{S'}$.
  - היפוך המרחק $x_S=-x_{S'}$.
- הכוח הצנטריפוגלי: $-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{r_{S'}})$. במערכת S המקורית פועל הכוח כלפי מרכז המעגל. כוח זה מדומה.

- הכוח הקוריולי: $-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{S'}$. כוח זה פועל במאונך לכיוון המהירות $\dot{\vec{r}}$. גם כן כוח מדומה. הוקטור $\vec{\omega}$ הוא בכיוון $\hat{z}$.
- דוגמה לנימוק של שימור בשתי המערכות: כשמכניסים ידיים ורגלים לקרוסלה מדוע מהירות סיבוב גדלה?
  - במערכת S יש שימור תנ"ז.
  - במערכת S' ישנו כוח קוריולי.
- טרנספורמציית גליליי היא טרנספורמציה לינארית בין מערכות ייחוס המראה כיצד משתנים הזמן והמרחב כאשר עוברים ממערכת ייחוס אחת למערכת ייחוס האחרת הנעה יחסית אליה במהירות קבועה בקו ישר. טרנספורמציית גליליי נכונה בקירוב טוב כל עוד המהירויות קטנות באופן משמעותי ממהירות האור ומוגדרת ע"י $\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}+v_0$.
- טרנספורמציות לורנץ הן טרנספורמציות לינאריות בין מערכות ייחוס המראות כיצד משתנים הזמן והמרחב כאשר עוברים ממערכת ייחוס אחת למערכת ייחוס אינרציאלית הנעה יחסית אליה במהירות קבועה בקו ישר.
- חבורת לורנץ:
  - הוגדרה בהרצאה כאוסף מטריצות הפיכות Λ כך ש$\eta=\Lambda^T\eta\Lambda$ היכן ש $\eta=\begin{bmatrix}x\\ ct\end{bmatrix}$עבור קבוע c. מפורשות מדובר במטריצות ההפיכות מסדר 2 על 2 מהצורה הבאה:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta\\ \gamma\beta & \gamma\end{pmatrix}$$

היכן ש

$$\begin{aligned}\beta &= \tanh u\\ \gamma &= \cosh u=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad (u\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

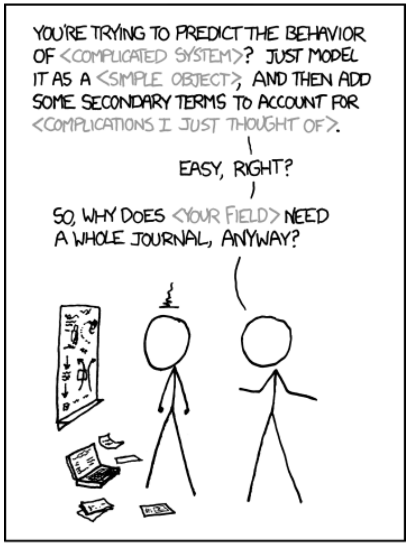
. ניתן לפשט לומר $\beta=\frac{v_0}{}$ היכן ש היא מהירות האור.

- בגבול $\beta\to 0$ מוביל לכך שטרנספורמצית לורנץ וגלילי מתלכדות (ז"א במהירות קטנה ממש ממהירות האור מספיק לעבוד עם טרנספורם גליליי).
- אורך לא נשמר בטרנספורם לורנץ.
- הידעת? ניתן להכליל גירסה זו של חבורת לורנץ לצורה $L=SO(3,1)$ כלומר החבורה האורתוגונלית המקושרת לתבנית הדיפרנציאלית (שלום אינפי4!) $Q(x,y,z,w)=x^2-y^2-z^2-w^2$ המרחב $\mathbb{R}^4$ עם המטריקה המושרית מהתבנית הדיפר' הנ"ל הוא מרחב מינקובסקי שדיברנו עליו בדיפר' 1 עם ראובן. אבל גם כאן בדומה למקרה הפרטי שהוצג בהרצאה מתקיים $\forall g\in\mathbb{F}^4\quad \Lambda^T g\Lambda=g$. בסימונים שלמעלה יתקיים :

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & 0\\ & & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ניתן גם לקבל במרחב הנ"ל מטריצות חדשות ל$boost$ ולסיבוב אך לא נביא אותן כאן כדי למנוע בלבול הקורא.

בהצלחה רבה! May the $\vec{F}$ be with U($\vec{r}$)!



LIBERAL-ARTS MAJORS MAY BE ANNOYING SOMETIMES, BUT THERE'S *NOTHING* MORE OBNOXIOUS THAN A PHYSICIST FIRST ENCOUNTERING A NEW SUBJECT.