

## תרגיל 9

### להגשה עד 18.1.17

יהי  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  מ"ח. נסמן:  $L^p(\mu) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$ . ו:  $l^p = L^p(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \mu)$ , באשר  $\mu$  הינה מידת הספירה.

#### שאלה 1

תהי:  $S := \{s \mid s: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is simple (measurable), and } \mu(\{x \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$ . הוכיחו כי :

1.  $S$  מרחב לינארי מעל  $\mathbb{R}$ .

2. לכל  $p \in [1, \infty)$ :  $S = \{t \mid t: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is simple, and } t \in L^p(\mu)\}$ .

3. לכל  $p \in [1, \infty)$ ,  $S$  צפופה ב  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ .

#### שאלה 2

נניח  $X$  מרחב טופולוגי, ו-  $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$ , ולכל  $V$  פתוחה לא ריקה מתקיים  $\mu(V) > 0$ . הוכיחו כי אם  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות כך ש  $f = g$  כב"מ- $\mu$  אז  $f(x) = g(x)$  לכל  $x \in X$ , והסיקו מכך כי לכל  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה מתקיים:

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

#### שאלה 3

1. נניח כי  $\mu(X) < \infty$ . הוכיחו כי אם  $1 \leq r < p < \infty$  אזי  $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$  ולכל  $f \in L^p(\mu)$  מתקיים:

$$\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$$

2. הוכיחו כי אם  $r < p$  אזי  $l^r \not\subseteq l^p$ .

#### שאלה 4

תהי  $(f_n)_n$  סדרת פונקציות ממשיות מדידות- $\mathbb{A}$  על  $X$  המתכנסת כב"מ לפונקציה  $f$ . נניח שעבור  $p \in [1, \infty)$  קיימת  $g \in L^p(\mu)$  כך שלכל  $n$ :  $|f_n| \leq g$  (כב"מ). הוכיחו כי  $f, f_n \in L^p(\mu)$ , וכן כי  $f_n \rightarrow f$  ב  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ .

#### שאלה 5

יהי  $\mathcal{H}$  מרחב הילברט ו- $\mathcal{M}$  תת מרחב לינארי סגור של  $\mathcal{H}$ . הוכיחו כי:  $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{H}$ .

## שאלה 6

יהי  $\mathcal{H}$  מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי  $(x_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ . נתון כי  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ , וכי לכל  $y \in \mathcal{H}$  מתקיים:  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ . הוכיחו כי:  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

**בהצלחה (:**