

תרגיל 9

להגשה עד 1.2.17

יהי (X, \mathbb{A}, μ) מ"ח. נסמן: $L^p(\mu) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$. ו: $l^p = L^p(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \mu)$, באשר μ הינה מידת הספירה.

שאלה 1

תהי: $S := \{s \mid s: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is simple (measurable), and } \mu(\{x \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$. הוכיחו כי :

1. S מרחב לינארי מעל \mathbb{R} .

2. לכל $p \in [1, \infty)$ $S = \{t \mid t: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is simple, and } t \in L^p(\mu)\}$.

3. לכל $p \in [1, \infty)$, S צפופה ב $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

שאלה 2

נניח X מרחב טופולוגי, ו- $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$, ולכל V פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V) > 0$. הוכיחו כי אם $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות כך ש $f = g$ כב"מ- μ אז $f(x) = g(x)$ לכל $x \in X$, והסיקו מכך כי לכל $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה מתקיים:

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

שאלה 3

1. נניח כי $\mu(X) < \infty$. הוכיחו כי אם $1 \leq r < p < \infty$ אזי $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ ולכל $f \in L^p(\mu)$ מתקיים:

$$\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$$

2. הוכיחו כי אם $r < p$ אזי $l^r \not\subseteq l^p$.

שאלה 4

תהי $(f_n)_n$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות- \mathbb{A} על X המתכנסת כב"מ לפונקציה f . נניח שעבור $p \in [1, \infty)$ קיימת $g \in L^p(\mu)$ כך שלכל $n: |f_n| \leq g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f, f_n \in L^p(\mu)$, וכן כי $f_n \rightarrow f$ ב $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

שאלה 5

יהי \mathcal{H} מרחב הילברט ו- \mathcal{M} תת מרחב לינארי סגור של \mathcal{H} . הוכיחו כי: $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{H}$.

שאלה 6

יהי \mathcal{H} מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי $(x_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$. נתון כי $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ כאשר $n \rightarrow \infty$, וכי לכל $y \in \mathcal{H}$ מתקיים: $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ כאשר $n \rightarrow \infty$. הוכיחו כי: $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ כאשר $n \rightarrow \infty$.

בהצלחה (: