פתרון תרגיל 9

13 בינואר 2021

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

(א) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

(ב) $9y'' + 6y' + y = x^2 + x + 1$.

(ג) $y'' - 8y' + 7y = 0$

(ד) $y'' - 2y' + 10y = 0$

(ה) $y'' + 10y = 2x$

(ו) $4y'' + 4y' + y = 0$

פתרון:

א. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

השורשים הם $\lambda = 2, \frac{1}{2}$, שניהם ממשיים שונים, לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

ב. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2$$

השורש הוא $\lambda = -\frac{1}{3}$, הוא יחיד. לכן הפתרון להומוגנית הוא:

$$y_h = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

ונקבל:

$$\begin{cases} y_p' = 2ax + b \\ y_p'' = 2a \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$9 \cdot 2a + 6(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} a = 1 & \\ 12a + b = 1 & b = -11 \\ 18a + 6b + c = 1 & c = 49 \end{cases}$$

כלומר הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p = x^2 - 11x + 49$$

ובסה"כ פתרון המד"ר זה סכום של ההומוגנית והפרטי:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x} + x^2 - 11x + 49$$

ג. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)$$

השורשים הם $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 1$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}$$

ד. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

השורשים הם: $\alpha = 2 \pm 3i$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$$

ה. המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2 + 10 = 0$$

השורשים הם:$\alpha = \pm\sqrt{10}i$ ולכן הפתרון להומוגנית הוא:

$$y_h = C_1 \cos \sqrt{10}x + C_2 \sin \sqrt{10}x$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

ונקבל:

$$\begin{cases} y_p' = 2ax + b \\ y_p'' = 2a \end{cases}$$

נציב במד"ר:

$$2a + 10ax^2 + 10bx + 10c = 2x$$

ונקבל את המערכת (מהשוואת מקדמים):

$$\begin{cases} 10a = 0 & x^2 \\ 10b = 2 & x \\ 2a + 10c = 0 & 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{5}, c = 0$$

ולכן:

$$y_p = \frac{1}{5}x$$

ולכן הפתרון הכללי הוא הסכום:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos\sqrt{10}x + C_2 \sin\sqrt{10}x + \frac{1}{5}x$$

ו. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2$$

יש רק שורש אחד: $\alpha = -\frac{1}{2}$ ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

2. מצאו פתרון פרטי של המד"ר עם תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 7y = 14x^2 - 4x + 3 \\ y(0) = 5 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

החלק ההומוגני מתאים למד"ר משאלה 1 סעיף ג. הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

נמצא פתרון פרטי, ע"י ניחוש:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

נציב במד"ר:

$$2a - 8(2ax + b) + 7(ax^2 + bx + c) = 14x^2 - 4x + 3$$

$$7ax^2 + (7b - 16a)x + 2a - 8b + 7c = 14x^2 - 4x + 3$$

נעשה השוואת מקדמים, ונקבל:

$$7a = 14$$

$$a = 2$$

$$7b - 16 \cdot 2 = -4$$

$$b = 4$$

$$2 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 7c = 3$$

$$c = \frac{31}{7}$$

כלומר פתרון פרטי של המד"ר הוא:

$$y_p = 2x^2 + 4x + \frac{31}{7}$$

ולכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{7x} + 2x^2 + 4x + \frac{31}{7}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 + \frac{31}{7} \\ 1 = c_1 e + c_2 e^7 + 2 + 4 + \frac{31}{7} \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נציב $c_2 = 5 - \frac{31}{7} - c_1$ ונקבל:

$$1 = c_1 e + e^7(5 - \frac{31}{7} - c_1) + 6 + \frac{31}{7}$$

$$c_1(e - e^7) = -5 - \frac{31}{7} + e^7(-5 + \frac{31}{7})$$

$$c_1 = \frac{-5 - \frac{31}{7} + e^7(-5 + \frac{31}{7})}{e - e^7}$$

$$c_2 = 5 - \frac{31}{7} - \frac{-5 - \frac{31}{7} + e^7(-5 + \frac{31}{7})}{e - e^7}$$