

מבחן בגאומטריה אלגברית 1, מועד 2007 א'

14 בפברואר 2015

1 שאלה 1

נתונות שלוש קבוצות במרחב \mathbb{C}_z^5 :

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \begin{aligned} z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 + z_4^5 + z_5^6 &= 1 \\ \prod_{i=1}^5 z_i &= 1 \end{aligned} \right\} \\ Y &= \left\{ \prod_{i=1}^4 z_i z_{i+1} = 0 \right\} \\ Z &= X - (Y \cap X) \end{aligned}$$

1. ר"ל האם Z יריעה אפינית/ פרויקטיבית (לפי הערה משיעור החזרה וע"ע הפתרון של מבחן 2011 א') כיוון שב Z יש יותר מנקודה אחת לא יתכן ששניהם. Y מוגדרת ע"י פולינום הומוגני אחד מעל \mathbb{C}^5 ולכן היא יריעה אפינית. X גם היא יריעה אפינית כבתור פתרון למערכת המשוואות הפולינומיאלית הזו. כעת Z היא קבוצה אפינית כבתור חיסור של חיתוך קבוצה אפינית עם יריעה מתוך היריעה.

2. ראה 1.

3. רוצים למצוא $\bar{Y} \subset \mathbb{P}^5$ (הסגור). נרשום

$$z_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$$

ונציב בתוך Y לקבל שהמשוואה היא:

$$\frac{\prod_{i=1}^4 \omega_i \omega_{i+1}}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \bar{Y} = \left\{ \prod_{i=1}^4 \omega_i \omega_{i+1} \right\}$$

2 שאלה 2

רוצים למצוא את $\mathbb{C}[X]$ של הפונקציות הרציונליות הרגלוריות $f : X \rightarrow \mathbb{C}^1$ היכן ש $X = S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2$. נשים לב ש X היא אפינית כבתור אוסף אפסים ("פתרונות")

של פולינום, כלומר

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x, y] / I(X)$$

אך האידיאל של הקבוצה מוג' ע"י $I(X) = \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$. נחשב את המנה הנ"ל לפי השלבים משיעור החזרה:

- כל צמצום של הפולינום $p(x, y)$ על X נותן פולינום מהצורה

$$p_1(x) + yp_2(x)$$

שהוא בחוג המנה $x^2 + y^2 = 1$.

- כל מח"ש של פולינומים בחוג המנה מכילה פולינום יחיד כנ"ל שאחרת:

$$p_1(x) + y \cdot p_2(x) = q_1(x) + y \cdot q_2(x)$$

ונובע מיידית

$$(p_1 - q_1) = y(q_2 - q_1)$$

נחלק למקרים:

- $q_2 - p_2 \neq 0$ על X אזי יש הצבה של $\bar{x} = (x)$ כך ש $(q_2 - p_2)(\bar{x}) \neq 0$ ואז מקבלים נק' יחידה ב- X שמתאימה ל \bar{x} הנ"ל והיא

$$\left(x, \frac{(p_1 - q_1)(\bar{x})}{(q_2 - p_2)(\bar{x})} \right)$$

אבל לפי המשוואה ניתן לקחת גם את הנקודה הנגדית ($\bar{y} = -y$) בסתירה ליחידות.

- $q_2 - p_2 \equiv 0 \Leftrightarrow p_1 - q_1 \equiv 0$ ולפי משפט האפסים (בגירסה החלשה)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad (p_1 - q_1)^{n_0} = (x^2 + y^2 - 1) r$$

היכן ש $r \in \mathbb{C}[x, y]$ אבל $p_1 - q_1$ לא תלוי ב y ונקבל סתירה.

- חוג המנה הנ"ל סגור גם לסכום ומכפלה של כל שתי פולינומים מהצורה הנ"ל

מכאן נובע

$$\mathbb{C}[X] = \{p_1(x) + y \cdot p_2(x) \mid p_{1,2} \in \mathbb{C}[x]\}$$

3 שאלה 3

דומה מאוד לשאלה 2 מועד א' 2011.

4 שאלה 4

במרחב \mathbb{P}^3 שמייצג את conics ב \mathbb{P}^2 יש למצוא את תת המרחב $X \subseteq \mathcal{C}$ של הקוניקות שאינן עוברות דרך $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, אבל כן עוברות דרך $(0, 0, 1)$. כל קוניקה ניתנת להצגה כ:

$$0 = a_0\omega_0^2 + a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_0\omega_1 + a_4\omega_1\omega_2 + a_5\omega_0\omega_2$$

דורשים ש:

$$\begin{cases} 0 \neq a_0 + 4a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5 = f_1(\bar{x}) \\ 0 \neq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = f_2(\bar{x}) \end{cases}$$

אבל שכן יתקיים

$$0 = a_2 = f_3(\bar{x})$$

וניתן להציג את X כבתור $X = \{f_3(\bar{x}) = 0\} \setminus (\{f_1(\bar{x}) = 0\} \cup \{f_2(\bar{x}) = 0\})$ ולכן X אפינית כי הצגנו אותה כקבוצה פרויקטיבית פחות hyperspace.

5 שאלה 5

לא בחומר (הזכרנו בקצרה בהרצאה האחרונה אבל לא ממש דיברנו על deg).