מבחן בגאומטריה אלגברית 1, מועד 2007 א'

15 בפברואר 2015

1 שאלה 1

נתונות שלוש קבוצות במרחב $\mathbb{C}^5_{\bar{z}}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} z_1^2+z_2^3+z_3^4+z_4^5+z_5^6=1 \\ \prod_{i=1}^5 z_i = 1 \end{cases} \\ Y &= \left\{ \prod_{i=1}^4 z_i z_{i+1} = 0 \right\} \\ Z &= X - (Y \cap X) \end{aligned}$$

1. ר"ל האם Z יריעה אפינית/ פרויקטיבית (לפי הערה משיעור החזרה וע"ע הפתרון של מבחן 2011 א') כיוון שZב יש יותר מנקודה אחת לא יתכן ששניהם. Y מוגדרת ע"י פולינום הומוגני אחד מעל $\mathbb{C}^5$ ולכן היא יריעה אפינית. X גם היא יריעה אפינית כבתור פתרון למערכת המשוואות הפולינומיאלית הזו. כעת Z היא קבוצה אפינית כבתור חיסור של hypersurface מקבוצה אפינית.
2. ראה 1.
3. רוצים למצוא $\bar{Y} \subset \mathbb{P}^5$ (הסגור). נרשום

$$z_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$$

ונציב בתוך Y לקבל שהמשוואה היא:

$$\frac{\prod_{i=1}^4 \omega_i \omega_{i+1}}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \bar{Y} = \left\{ \prod_{i=1}^4 \omega_i \omega_{i+1} \right\}$$

2 שאלה 2

רוצים למצוא את $\mathbb{C}[X]$ של הפונקציות הרציונליות הרגלוריות $f : X \to \mathbb{C}^1$ היכן ש= X $S^1 = \left\{x^2+y^2=1\right\} \subseteq \mathbb{C}^2$. נשים לב ש$X$ היא אפינית כבתור אוסף אפסים ("פתרונות")

של פולינום, כלומר

$$\mathbb{C}\left[X\right]=\mathbb{C}\left[x,y\right]/I\left(X\right)$$

אך האידיאל של הקבוצה מוג' ע"י $I\left(X\right)=\left\langle x^{2}+y^{2}-1\right\rangle$. נחשב את המנה הנ"ל לפי השלבים משיעור החזרה:

- כל צמצום של הפולינום $p\left(x,y\right)$ על X נותן פולינום מהצורה

$$p_{1}\left(x\right)+yp_{2}\left(x\right)$$

שהוא בחוג המנה $x^{2}+y^{2}=1$.

- כל מח"ש של פולינומים בחוג המנה מכילה פולינום יחיד כנ"ל שאחרת:

$$p_{1}\left(x\right)+y\cdot p_{2}\left(x\right)=q_{1}\left(x\right)+y\cdot q_{2}\left(x\right)$$

ונובע מיידית

$$\left(p_{1}-q_{1}\right)=y\left(q_{2}-q_{1}\right)$$

נחלק למקרים:

  - $q_{2}-p_{2}\not\equiv0$ על X אזי יש הצבה של $\bar{x}=\left(x\right)$ כך ש$\left(q_{2}-p_{2}\right)\left(\bar{x}\right)\neq0$ ואז מקבלים נק' יחידה ב־X שמתאימה ל$\bar{x}$הנ"ל והיא

$$\left(x,\frac{\left(p_{1}-q_{1}\right)\left(\bar{x}\right)}{\left(q_{2}-p_{2}\right)\left(\bar{x}\right)}\right)$$

אבל לפי המשוואה ניתן לקחת גם את הנקודה הנגדית ($\tilde{y}=-y$) בסתירה ליחידות.

  - $q_{2}-p_{2}\equiv0\Leftarrow p_{1}-q_{1}\equiv0$ ולפי משפט האפסים (בגירסה החלשה)

$$\exists n_{0}\in\mathbb{N},\quad\left(p_{1}-q_{1}\right)^{n_{0}}=\left(x^{2}+y^{2}-1\right)r$$

היכן ש$r\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$ אבל $p_{1}-q_{1}$ לא תלוי בy ונקבל סתירה.

- חוג המנה הנ"ל סגור גם לסכום ומכפלה של כל שתי פולינומים מהצורה הנ"ל

מכאן נובע

$$\mathbb{C}\left[X\right]=\left\{ p_{1}\left(x\right)+y\cdot p_{2}\left(x\right)\mid p_{1,2}\in\mathbb{C}\left[x\right]\right\}$$

3 שאלה 3

דומה מאוד לשאלה 2 מועד א' 2011.

4 שאלה 4

במרחב $\mathbb{P}^3$ שמייצג את הconics ב$\mathbb{P}^2$ יש למצוא את תת המרחב $X \subseteq \mathcal{C}$של הקוניקות שאינן עוברות דרך $(1,2,1),(1,1,1)$ אבל כן עוברות דרך $(0,0,1)$. כל קוניקה ניתנת להצגה כ:

$$0 = a_0\omega_0^2 + a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_0\omega_1 + a_4\omega_1\omega_2 + a_5\omega_0\omega_2$$

דורשים ש:

$$\begin{cases} 0 \neq a_0 + 4a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5 = f_1(\bar{x}) \\ 0 \neq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = f_2(\bar{x}) \end{cases}$$

אבל שכן יתקיים

$$0 = a_2 = f_3(\bar{x})$$

וניתן להציג את X כבתור $X = \{f_3(\bar{x}) = 0\} \setminus (\{f_1(\bar{x}) = 0\} \cup \{f_2(\bar{x}) = 0\})$ ולכן X אפינית כי הצגנו אותה כקבוצה פרויקטיבית פחות hyperspace.

5 שאלה 5

לא בחומר (הזכרנו בקצרה בהרצאה האחרונה אבל לא ממש דיברנו על deg).