# מבחן בגאומטריה אלגברית 1, מועד 2007 א'

15 בפברואר 2015

## 1 שאלה 1

נתונות שלוש קבוצות במרחב $\mathbb{C}^5_{\bar{z}}$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} z_1^2+z_2^3+z_3^4+z_4^5+z_5^6=1 \\ \prod_{i=1}^5 z_i=1 \end{cases} \\ Y &= \left\{\prod_{i=1}^4 z_i z_{i+1}=0\right\} \\ Z &= X-(Y\cap X) \end{aligned}$$

1. ר"ל האם $Z$ יריעה אפינית/ פרויקטיבית (לפי הערה משיעור החזרה וע"ע הפתרון של מבחן 2011 א') כיוון ש$Z$ב יש יותר מנקודה אחת לא יתכן ששניהם. $Y$ מוגדרת ע"י פולינום הומוגני אחד מעל $\mathbb{C}^5$ ולכן היא יריעה אפינית. $X$ גם היא יריעה אפינית כבתור פתרון למערכת המשוואות הפולינומיאלית הזו. כעת $Z$ היא קבוצה אפינית כבתור חיסור של hypersurface מקבוצה אפינית.
2. ראה 1.
3. רוצים למצוא $\bar{Y}\subset\mathbb{P}^5$ (הסגור). נרשום

$$z_i=\frac{\omega_i}{\omega_0}$$

ונציב בתוך $Y$ לקבל שהמשוואה היא:

$$\frac{\prod_{i=1}^4 \omega_i\omega_{i+1}}{\omega_0^2}=0\Rightarrow \bar{Y}=\left\{\prod_{i=1}^4 \omega_i\omega_{i+1}\right\}$$

## 2 שאלה 2

רוצים למצוא את $\mathbb{C}[X]$ של הפונקציות הרציונליות הרגלוריות $f:X\to\mathbb{C}^1$ היכן ש$X=$ $\mathbb{C}^2\supseteq\left\{x^2+y^2=1\right\}=S^1$. נשים לב ש$X$ היא אפינית כבתור אוסף אפסים ("פתרונות")

של פולינום, כלומר

$$\mathbb{C}\left[X\right]=\mathbb{C}\left[x,y\right]/I\left(X\right)$$

אך האידיאל של הקבוצה מוג' ע"י $I\left(X\right)=\left\langle x^{2}+y^{2}-1\right\rangle$. נחשב את המנה הנ"ל לפי השלבים משיעור החזרה:

- כל צמצום של הפולינום $p\left(x,y\right)$ על $X$ נותן פולינום מהצורה

  $$p_{1}\left(x\right)+yp_{2}\left(x\right)$$

  שהוא בחוג המנה $x^{2}+y^{2}=1$.

- כל מח"ש של פולינומים בחוג המנה מכילה פולינום יחיד כנ"ל שאחרת:

  $$p_{1}\left(x\right)+y\cdot p_{2}\left(x\right)=q_{1}\left(x\right)+y\cdot q_{2}\left(x\right)$$

  ונובע מיידית

  $$\left(p_{1}-q_{1}\right)=y\left(q_{2}-q_{1}\right)$$

  נחלק למקרים:

  - $q_{2}-p_{2}\not\equiv0$ על $X$ אזי יש הצבה של $\bar{x}=\left(x\right)$ כך ש$\left(q_{2}-p_{2}\right)\left(\bar{x}\right)\neq0$ ואז מקבלים נק' יחידה ב־$X$ שמתאימה ל$\bar{x}$הנ"ל והיא

    $$\left(x,\frac{\left(p_{1}-q_{1}\right)\left(\bar{x}\right)}{\left(q_{2}-p_{2}\right)\left(\bar{x}\right)}\right)$$

    אבל לפי המשוואה ניתן לקחת גם את הנקודה הנגדית ($\tilde{y}=-y$) בסתירה ליחידות.

  - $q_{2}-p_{2}\equiv0\Leftarrow p_{1}-q_{1}\equiv0$ ולפי משפט האפסים (בגירסה החלשה)

    $$\exists n_{0}\in\mathbb{N},\quad\left(p_{1}-q_{1}\right)^{n_{0}}=\left(x^{2}+y^{2}-1\right)r$$

    היכן ש$r\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$ אבל $p_{1}-q_{1}$ לא תלוי ב$y$ ונקבל סתירה.

- חוג המנה הנ"ל סגור גם לסכום ומכפלה של כל שתי פולינומים מהצורה הנ"ל

מכאן נובע

$$\mathbb{C}\left[X\right]=\left\{ p_{1}\left(x\right)+y\cdot p_{2}\left(x\right)\mid p_{1,2}\in\mathbb{C}\left[x\right]\right\}$$

## 3 שאלה 3

דומה מאוד לשאלה 2 מועד א' 2011.

## 4 שאלה 4

במרחב $\mathbb{P}^3$ שמייצג את הconics ב$\mathbb{P}^2$ יש למצוא את תת המרחב $X \subseteq \mathcal{C}$של הקוניקות שאינן עוברות דרך $(1,2,1)\,,(1,1,1)$ אבל כן עוברות דרך $(0,0,1)$. כל קוניקה ניתנת להצגה כ:

$$0 = a_0\omega_0^2 + a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_0\omega_1 + a_4\omega_1\omega_2 + a_5\omega_0\omega_2$$

דורשים ש:

$$\begin{cases} 0 \neq a_0 + 4a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5 = f_1\left(\bar{x}\right) \\ 0 \neq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = f_2\left(\bar{x}\right) \end{cases}$$

אבל שכן יתקיים

$$0 = a_2 = f_3\left(\bar{x}\right)$$

וניתן להציג את $X$ כבתור

$$\begin{aligned} X &= \{f_3\left(\bar{x}\right) = 0\} \setminus \left(\{f_1\left(\bar{x}\right) = 0\} \cup \{f_2\left(\bar{x}\right) = 0\}\right) \\ &= \left(\{f_3\left(\bar{x}\right) = 0\} \setminus \{f_1\left(\bar{x}\right) = 0\}\right) \cup \left(\{f_3\left(\bar{x}\right) = 0\} \setminus \{f_2\left(\bar{x}\right) = 0\}\right) \end{aligned}$$

כ"א מהקבוצות הנ"ל בנפרד היא קבוצה אפינית: $f_3\left(\bar{x}\right) = 0$ היא פרויקטיבית כבתור חיתוך של קבוצת הקוניקות עם כלל העקומות שעוברות דרך הנקודה הנ"ל. מקבוצה זו אנו מפחיתים בכל פעם חיתוך של hyperspace (מוג' ע"י משוואה פולינומית הומוגנית אחת). הפחתה כנ"ל מקבוצה פרויקטיבית נותנת בהכרח יריעה אפינית. הוכחנו בהרצאה שאיחוד של קבוצות אפיניות הוא אפיני ולכן גם $X$ אפינית.

## 5 שאלה 5

לא בחומר (הזכרנו בקצרה בהרצאה האחרונה אבל לא ממש דיברנו על deg).