פתרון למבחן אלגברה לינארית 1 קיץ תשעז מועד א'

1. משפט מההרצאה

2. (א) הוכחה: ראשית נזכור שלפי משפט מההרצאה, מטריצה A היא הפיכה אם ורק אם בצורה המדורגת קנונית שלה אין שורות אפסים. כמו כן הוכנו בהרצאה שמטריצות A, B הן הפיכות אם ורק אם $A \cdot B$ הפיכה. כעת אפשר להוכיח בקלות. מצד אחד אם ל $CF(A)$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה ולכן A^2 לא הפיכה ולכן ל $CF(A^2)$ יש שורת אפסים. מצד שני אם ל $CF(A^2)$ יש שורת אפסים אז A^2 לא הפיכה ולכן A לא הפיכה ולכן ל $CF(A)$ יש שורת אפסים?

(ב) הפרכה: ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A היא כבר מדורגת קנונית כלומר $CF(A) = A$ ויש בה בדיוק שתי שורות אפסים אבל

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא גם מטריצה מדורגת קנונית כלומר $CF(A^2) = A^2$ אבל ב A^2 יש שלוש שורות אפסים.

(ג) הוכחה: נניח בשלילה ש $A^2 = 0$ כלומר $A \cdot A = 0$ לפי משפט כפל עמודה עמודה

$$C_i(A \cdot A) = AC_i(A)$$

אבל

$$C_i(A \cdot A) = C_i(0) = 0$$

כלומר

$$AC_i(A) = 0$$

ולכן

$$C_i(A) \in N(A)$$

כלומר כל עמודה של A נמצאת במרחב האפס של A. לכן גם כל צירוף לינארי של עמודות נמצא במרחב האפס ולכן

$$C(A) \subseteq N(A)$$

ובפרט

$$\operatorname{rank} A = \dim C(A) \leq \dim N(A)$$

כמו כן, לפי משפט מההרצאה (משפט הדרגה למטריצות)

$$\operatorname{rank} A + \dim N(A) = 5$$

(כי במטריצה שלנו יש 5 עמודות) לכן

$$\dim N(A) = 5 - \operatorname{rank} A$$

אם נציב זאת באי שוויון שקיבלנו קודם נקבל

$$\operatorname{rank} A \leq 5 - \operatorname{rank} A$$

$$2 \operatorname{rank} A \leq 5$$

$$\operatorname{rank} A \leq \frac{5}{2}$$

אבל היות ש $\operatorname{rank} A$ הוא מספר שלם אז זה בעצם אומר ש

$$\operatorname{rank} A \leq 2$$

בסתירה לנתון ש

$$\operatorname{rank} A > 2$$

(ד) הוכחה: לפי משפט על rank מתקיים ש $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B$.
במקרה שלנו אפשר לקחת $A = B$ ואז

$$4 = \operatorname{rank}(A^2) \le \operatorname{rank} A$$

לכן יש רק שתי אפשרויות עבור $\operatorname{rank} A$: או 4 או 5. אבל אם $\operatorname{rank} A = 5$ אז A הפיכה ואז A^2 הפיכה ואז $\operatorname{rank} A^2 = 5$ בסתירה. לכן האפשרות היחידה שנותרה היא

$$\operatorname{rank} A = 4$$

ובזה הוכחנו.

3. הוכחה: נסמן $u = Tv - v$ לפי הנתון $v \ne Tv$ ולכן $u \ne 0$ אבל

$$T(u) = T(T(v) - v) = TT(v) - T(v) = T(v) - T(v) = 0$$

וזהו.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

(א) צריך להבין מתי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של עמודות A וזה קורה בדיוק כאשר יש פתרון למערכת

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

אז נבדוק לאילו ערכי a יש פתרון (לפחות אחד) למערכת הנ"ל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & a \end{array}\right)$$

נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$$

כדי שלא תהיה שורת סתירה צריך ש $a=-3$. וזה הפתרון.

(ב) ביצוע פעולות שורה לא משנה את מרחב השורות. אז אפשר פשוט לבצע פעולות שורה עד שנגיע למטריצה שאחת העמודות שלה היא $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. וזה די קל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(ג) כדי למצוא בסיס ומימד לחיתוך, כדאי לתאר את המרחבים שלנו כאוסף פתרונות של מערכת משוואות כלשהיא עבור מרחב האפס זה מיידי

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$$

כלומר מרחב האפס מתואר על ידי המערכת

$$x+3z=0$$
$$2x+y+5z=0$$
$$-x+2y-5z=0$$

מרחב העמודות דווקא נתון לנו כ span של כמה וקטורים. אבל יש לנו אלגוריתם שמאפשר לנו לייצג אותו כפתרון של מערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 2 & 1 & 5 & y \\ -1 & 2 & -5 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-2x \\ -1 & 2 & -5 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-2x \\ 0 & 2 & -2 & z+x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & z+5x-2y \end{array}\right)$$

בסך הכל כדי שיהיה פתרון למערכת צריך ש

$$5x-2y+z=0$$

וזאת המשוואה שמתארת את מרחב העמודות. עכשיו, המרחב $C(A)\cap N(A)$ הוא אוסף הוקטורים ש[ותרים את כל המשוואות הנ"ל כלומר

$$x+3z=0$$
$$2x+y+5z=0$$
$$-x+2y-5z=0$$
$$5x-2y+z=0$$

כדי למצוא בסיס ומימד נמצא את מרחב הפתרונות, כרגיל על ידי פתרון על ידי

דירוג של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

את הדירוג של 3 השורות הראשונות עשינו למעשה כבר פעמיים בסעיפים הקודמים, ברור שזה יוצא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

נותר לדרג את הסוף

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4=R_4-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4=R_4+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמו שרואים בקלות, בצורה המדורגת אין משתנים חופשיים ולכן הפתרון היחיד הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. כלומר המרחב $C(A) \cap N(A)$ מכיל רק את $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ וזה מרחב ממימד 0 שבסיסו הוא הקבוצה הריקה $\varnothing$.

(ד) ראינו כבר ש A היא מטריצה לא הפיכה (כי מרחב העמודות שלה הוא לא כל

$\mathbb{R}^3$) לכן גם

$$\begin{pmatrix} b & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix}$$

חייבת להיות מטריצה לא הפיכה, נדרג אותה ונראה איך זה יכול לקרות

$$\begin{pmatrix} b & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ b & 3 & 4 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - bR_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4+b \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4+b \\ 0 & 2 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - \frac{2}{3}R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4+b \\ 0 & 0 & b+1-\frac{2}{3}(4+b) \end{pmatrix}$$

כדי שהמטריצה תהיה לא הפיכה צריך שבצורה מדורגת תהיה שורת אפסים. אז צריך ש

$$b+1-\frac{2}{3}(4+b) = 0$$

$$3b+3 = 8+2b$$

$$b = 5$$

וזאת התשובה.

5. (א) לפי הנתון

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

אם נבצע פיתוח לפי שורה ראשונה נראה שזה אומר ש

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = 0$$

ולכן

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

עכשיו נלך לביטויים שלנו

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & -b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + 2c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + 2c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= 2b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} d & e & f \\ 0 & 2b & -c \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 0 & 2b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= -\left(-2b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\right) \\ &=2b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\end{aligned}$$

ולכן באמת יש שוויון.

(ב) כבר אמרו לנו שהמטריצה A לא הפיכה ולכן $\operatorname{rank} A \neq 3$. האפשרויות שנותרו הן $\operatorname{rank} A \in \{0, 1, 2\}$. עכשיו, אם $\operatorname{rank} A = 0$ אז $A = 0$ ואז לא ייתכן ש

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 1$$

ולכן

$$\operatorname{rank} A \in \{1, 2\}$$

עכשיו אם $\operatorname{rank} A = 1$ זה אומר שכל שתי שורות במטריצה תלויות לינארית (אם

היו שתי שורות בת"ל אז מימד מרחב השורות היה לפחות 2). בפרט, הוקטורים

$$(a,b,c),(d,e,f)$$

הם תלויים לינארית. כלומר יש α,β כך ש

$$\alpha(a,b,c)+\beta(d,e,f)=0$$

ואז גם

$$\alpha(a,b)+\beta(d,e)=0$$

כלומר גם (a,b) ו (d,e) תלויים לינארית ולכן

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=0$$

בסתירה. האפשרות היחידה שנותרה היא

$$\operatorname{rank} A=2$$

(ג) אנחנו יודעים כבר שהמטריצה

$$A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

אינה הפיכה. אם נבצע פיתוח לפי שורה אחרונה זה אומר לנו ש

$$g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}-h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}+i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=0$$

היות ש

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=1$$

זה אומר ש

$$i=-g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

עכשיו אנחנו נוכיח שאם $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{vmatrix}$ אינה הפיכה, אז $t = i$. נפתח שוב לפי שורה אחרונה

$$g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{vmatrix} = 0$$

$$g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + t = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{vmatrix} = 0$$

ולכן

$$t = -g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = i$$

וזהו.